Grupo de discusión Frege

Sesión 5 (01/06/2020 18:00 vía Zoom)

Tema II: La presentación del logicismo: *los fundamentos de la aritmética*

Las citas textuales de Frege provienen de la traducción de Ulises Moulines con eventuales modificaciones (dejando la traducción original como texto tachado) y adiciones entre corchetes: Frege, Gottlob (1884/1972). *Fundamentos de la Aritmética. Investigación lógico-matemática sobre el concepto de número.* Con un estudio de Claude Imbert y prólogo de Jesus Mosterin. Traducción de Ulises Moulines, Barcelona: Editorial Laia.

Segunda parte

Conversación entre sesiones

Lo que sigue aquí es una conversación que tuvo lugar entre la sesión 4a y 5a vía WhatsApp entre Cristopher y Kurt

Cristopher: Oye tengo una duda, no sé si puedas ayudarme con ello. ¿"contenido conceptual" y "contenido juzgable" son sinónimos en la *Conceptografía*?

Kurt: Sí, más o menos. "contenido juzgable" se refiere más al hecho que es un contenido que puede ser afirmado o rechazado ("la casa es blanca"), a diferencia, por ejemplo, de un nombre particular ("casa"). "contenido conceptual" se refiere al papel que el contenido juzgable juega en las inferencias: es lo que se conserva al pasar de una serie de premisas a una conclusión. Pero la misma expresión se puede designar como "contenido juzgable" o "contenido conceptual", según yo lo veo.

Cris: Kurt, tengo una pregunta, si pudieras ayudarme. Frege en "Los fundamentos de la aritmética" propone el principio de contexto que consiste en encontrar el significado de una palabra o un numero en su contexto, y la clase pasada te escuche decir que esta noción permanece en "sentido y significado", mi pregunta es:
¿cuál es la relación del "principio de contexto" con la noción de significado como dador de valor veritativo en "sentido y referencia"?

Cris: Error de traducción: quise decir **en "Sentido y significado"

Kurt: No es así de directa la relación. Lo que quise decir es esto: en FA Frege menciona el principio de contexto en tres ocasiones literalmente, pero después de esto ya jamás habla de ese principio. Por esa situación muchos estudiosos de Frege han supuesto que ha abandonado ese principio después y lo ha reemplazado con el aspecto del reverso de ese principio (abandonando el anverso, si lo quieres ver así), el así llamado "principio de Frege", según el cual el sentido de una oración depende del sentido de sus componentes y de nada más. Es un punto que tendremos que discutir con más detalle cuando lleguemos a "Sobre sentido y *Bedeutung* (significado/referencia)". Por ejemplo, Dummett ha sostenido que Frege haya abandona el principio de contexto a partir de 1891, pero se retractó en una conferencia en 1993 de esto en una pieza que llama el principio de contexto de Frege un principio básico que nunca ha abandonado. Con esta última posición de Dummett estoy de acuerdo.

Cris: me ha surgido una nueva duda ¿Consideras que hay alguna relación entre la "Función" (entendida como el "elemento estable que da sentido al enunciado" en la Conceptografía), el "Principio de contexto" (entendido como principio para "determinar el significado de una palabra" en FA.) y el "Sentido" (entendido como el pensamiento objetivo o "el cómo se nos da el significado" de un signo en sentido y referencia)?

Pues me pareció encontrar paralelismos que me hicieron sospechar que hay un proceso evolutivo en dichas nociones, claro, desde una lectura muy poco especializada, y, considerando previamente la relación que me comentaste ayer entre el principio de contexto y su formulación reversa en sentido y referencia.

Kurt: Sí, hay una relación entre el análisis en función y argumento y el principio de contexto. La forma más general de referirse al principio de contexto se puede llamar el principio de la prioridad proposicional (no me gusta demasiado esta expresión porque no está muy claro aquí el uso de "proposicional", pero así se conoce). Esto está relacionado con lo que Kant llama "la unidad del pensamiento". La idea es que la unidad mínima de significado es lo que podemos juzgar, o sea, una afirmación completa. Esta se puede descomponer de manera varia en función y argumento, y lo que se dice del objeto que ocupa el lugar del argumento para "saturar" la función, depende de la función, o sea, del predicado que se usa para que sepamos de qué objeto estamos hablando; qué es lo que se dice del objeto. Por esto Frege dice que no

tiene sentido preguntar por el sentido o el significado de una palabra fuera del contexto de la oración completa. ¿Te sirve esta explicación?
Este principio, ciertamente, se encuentra también en Wittgenstein, tanto en el *Tractatus*, como en *Investigaciones filosóficas:* sólo ponerle nombre a algo, todavía no es un movimiento en el juego de lenguaje, dice allí, más o menos.

Cris: Sí me sirve bastante Kurt, y, en la *Conceptografía*, esta "unidad del pensamiento" por lo que entiendo subyace también la noción de contenido juzgable entendida como "todo (y sólo) lo importante cuando se trata de un juicio" ¿o me equivoco?

Kurt: Así es, como dices.

Último pasaje visto en la sesión pasada:

Para obtener el concepto de número, hay que fijar el sentido de una ecuación numérica

§ 62. Pero ¿cómo puede sernos dado un número, si no podemos tener de él ninguna imagen o intuición? **Solamente en el contexto de un enunciado *significan* ~~se refieren~~ las palabras ~~a~~ algo*).** De lo que se tratará, pues, es de determinar el sentido de un enunciado en el que entre un numeral. Esto, de momento, nos deja todavía con mucha libertad de elección. Pero ya hemos establecido que por numerales hay que entender objetos independientes. Con ello nos han sido dados una especie de enunciados que han de tener sentido: los enunciados que expresan que algo se reconoce de nuevo. Si el signo *a* debe designar un objeto, tendremos que disponer de un criterio para decidir en cualquier caso si *b* es lo mismo que *a*, aun cuando no siempre esté en nuestras manos el poder aplicar este criterio. En nuestro caso deberemos determinar el sentido del enunciado

«el número que corresponde al concepto F es el mismo
que el que corresponde al concepto G»;

esto es, deberemos reproducir el contenido de este enunciado en otra forma, sin emplear la expresión

«el número que corresponde al concepto F».

De este modo, estableceremos un criterio general para la igualdad de números. Después de haber conseguido un medio tal de concebir un número determinado y de reconocerlo como el mismo, podremos darle un numeral como nombre propio.

---

*) "bedeuten" (¡antes de 1891!) - Frege toma el significado del contenido conceptual de juicios sobre hechos. En términos general no asume que nombres particulares son etiquetas que funcionan independientemente de los juicios - lo que un nombre significa nos da el análisis en argumento y función, en el caso de los objetos sensibles, con ayuda de la intuición, en el caso de los objetos lógicos, sin esta ayuda. Pero estos juicios no son vacíos, como afirma Kant: «Nuestra naturaleza conlleva el que la *intuición* sólo pueda ser *sensible*, es decir, que no contenga sino el modo según el cual somos afectados por objetos. La capacidad de *pensar* el objeto de la intuición es, en cambio, el *entendimiento*. Ninguna de estas propiedades es preferible a la otra: sin sensibilidad ningún objeto nos sería dado y, sin entendimiento, ninguna sería pensado. Los pensamientos sin contenido son vacíos; las intuiciones sin conceptos son ciegas» (KrV A51/B75, traducción de Pedro Ribas).

El principio de Hume de la igualdad de números (§ 63)

«Si se combinan dos números de manera que el uno tenga siempre una unidad que corresponda a toda la unidad del otro, entonces los declararemos iguales».

Más general:
«para cualesquiera conceptos *F* y *G* el número de objetos *F* es igual al número de objetos *G*, si y sólo si entre los objetos *F* y los objetos *G* existe una correspondencia uno a uno».
(de: https://plato.stanford.edu/entries/frege-theorem/)

¿Cómo introducir un concepto nuevo? Las rectas paralelas y su dirección

§ 64. El juicio: «<a recta *a* es paralela a la recta » simbólicamente

a//b,

puede tomarse como una ecuación. Si lo hacemos así, obtenemos el concepto de **dirección** y podemos decir: «la dirección de la recta a es igual a la dirección de la recta b». Sustituimos, pues, el signo « // » por el más general de « = », distribuyendo el contenido particular del primero entre a y b. Fragmentamos el contenido de manera distinta a la originaria y obtenemos así un nuevo concepto.

$$D(a) = D(b)$$

Aquí se recurre al concepto (conocido) de identidad para obtener el concepto de lo que es idéntico: la dirección [de las rectas paralelas][1]

¿Bajo qué condiciones son iguales/idénticos?

Según Leibniz: "son lo mismo si uno se puede sustituir siempre por el otro conservando la verdad"
Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis:
"*Definitio 1. Eadem* sunt quorum unum potest susbstitui alteri salva veritate". [Parece que Leibniz tachó esta definición en el escrito mencionado, según menciona Christian Thiel]

Para justificar nuestro intento de definición de la dirección de una recta, deberíamos mostrar, pues, que la dirección de *a* puede sustituirse en todas partes por la dirección de *b*, cuando la recta *a* es paralela a la recta *b*.

Solo necesitaríamos, pues, demostrar la sustituibilidad en una igualdad de este tipo o en contenidos que incluyeran tales igualdades como elementos componentes. Todas las demás

---

[1] Frege lucha aquí un poco con los términos "igual" e "idéntico". Podemos aquí pasar por alto esta dificultad.

aseveraciones sobre direcciones deberían ser ~~definidas~~ ~~primero~~ explicadas después[2], y para estas definiciones, podemos estipular la regla de que debe ~~admitirse~~ conserva la sustituibilidad de la dirección de una recta por la de otra paralela a ella.

Se usaría el concepto de paralelismo de rectas para definir el concepto de dirección

Pero hasta aquí este intento de definición es circular:

"Esta no nos dice nada acerca de si el enunciado

«la dirección de *a* es igual a *q*»

debe ser afirmado o negado, si *q* mismo **no viene dado en la forma «la dirección de *b*»**. Nos falta el concepto de dirección" [qué cosa es *eadem*].

Se trata de *reconocer* un objeto como el mismo si nos es dado por diferentes vías. Esto nos impide recurrir a la definición previa para decidir si *q* es una dirección o no.

$a = a$ no aumenta nuestro conocimiento,
$a = b$ eventualmente sí.

67. Si quisiéramos decir: *q* es una dirección, si se ha introducido según la **definición** arriba formulada, entonces tomaríamos el modo en que el objeto *q* ha sido introducido como propiedad del mismo, ~~lo cual no es cierto~~ cosa que no es. La definición de un objeto, en sí misma, no afirma en realidad nada sobre el objeto, sino que fija el significado de un signo[3]. Después de haber ocurrido esto, [la definición] se transforma en un juicio, que trata del objeto; pero ahora ya no lo introduce y se halla al mismo nivel que otras afirmaciones hechas sobre él.

---

[2] Quizá mejor: "todos los demás predicados de las direcciones aún estarían por explicarse"; la sustituibilidad *salva veritate* es condición necesaria para ellos [la frase en alemán dice: "Alle anderen Aussagen von Richtungen müssten **erst** erklärt werden..."; erst" muchas veces se puede traducir como "primero" o "primeramente", pero esto aquí no tiene ningún sentido].

[3] en términos de otros signos. Frege aquí aun no hace la distinción entre "sentido" y "significado" que hará a partir de 1891. Que yo llame al "planeta rojo", Marte, no dice nada sobre Marte. Una vez hecha la definición, tenemos un nuevo criterio para el reconocimiento de un objeto: "el planeta rojo = Marte" ahora me permite juzgar que el punto rojizo en el cielo nocturno es Marte.

La solución propuesta por Frege (§ 68):
"Si la recta *a* es paralela a la recta *b*, la extensión del concepto «recta paralela a la recta *a*» es igual a la extensión del concepto «recta paralela a la recta *b*», y recíprocamente: si las extensiones de estos conceptos son iguales, *a* es paralela a *b*. Intentemos, pues, definir:

La dirección de la recta *a* es la extensión del concepto «paralelo a la recta *a*».
La forma del triángulo *t* es la extensión del concepto «semejante al triangulo *t*».

¿Cómo resuelve esto el problema del Cesar?
¿...?

***Equinumeralidad*:**
El concepto *F* es *equinumérico* al concepto *G* si los objetos que caen bajo el concepto *F* se pueden asociar unívocamente con los objetos que caen bajo el concepto *G*.

[¡a pesar de su nombre, este concepto no presupone el concepto de número!]

Definición:
el número que corresponde al concepto *F* es la extensión
del concepto «equinumérico al concepto *F*».

Extensiones de conceptos
1. Frege presupone aquí la extensión de concepto (nota de pie en el texto)
2. Extensiones conceptos pueden tener la propiedad de
   la igualdad
   un alcance mayor o menor

La extensión de «equinumérico al concepto *F*» = extensión de «equinumérico al concepto *G*»

si y sólo si es verdadero

«al concepto *F* le corresponde el mismo número que al concepto *G*».
[sustitución *salva veritatis*]

La equinumeralidad es una relación entre extensiones de conceptos (§ 70)

Relaciones son, más o menos, contenidos juzgables doblemente insaturados:

Cada uno de los **pares de objetos** correlacionados esta enlazado con el **concepto relacional** -podría decirse como sujeto- de manera análoga a como lo está el **objeto** individual con el **concepto** bajo el cual cae.

Así como

«*a* cae bajo el concepto *F*»

es la forma general del contenido de un juicio, que trata de un objeto *a*, también puede admitirse que

«*a* se halla en la relación φ con *b*»

es la forma general del contenido de un juicio, que trata del objeto *a* y del objeto *b*.

La correlación de *a* y *b* mediante la relación φ debe ser unívoca bidireccionalmente.

La correlación biyectiva se puede reducir a condiciones puramente lógicas (sin necesidad de intuición) con estas reglas:

1. Si *d* está en la relación φ con *a*, y si *d* está en la relación φ con *e*, entonces, en general, sean lo que sean *d*, *a* y *e*, *a* es lo mismo que *e*.

2. Si *d* está en la relación φ con *a*, y si *b* está en la relación φ con *a*, entonces, en general, sean lo que sean *d*, *b* y *a*, *d* es lo mismo que *b*.

Esto permite Frege definir como sigue:

la expresión

«el concepto *F* es equinumérico al concepto *G*»

significa lo mismo que la expresión

«existe una relación φ que a los objetos que caen bajo el concepto *F* les ~~aplica~~ correlaciona biyectivamente los objetos que caen bajo *G*».

Repito:

el número que corresponde al concepto *F* es la extensión del concepto «equinumérico al concepto F»

y añado:

la expresión

«*n* es un número»

significa lo mismo que la expresión

«existe un concepto tal, que *n* es el número que le corresponde».

De este modo se ha definido el concepto de número, claro que aparentemente por sí mismo, pero, con todo, no nos hemos equivocado, porque «el número que corresponde al concepto *F*» ya ha sido definido antes.

Falta demostrar que esta definición funciona, y luego cómo se definirían los números concretos. Y algunos otros detalles para concluir el tema la próxima vez.

KW