

Grupo de discusión Frege

Sesión 4 (18/05/2020 18:00 vía Zoom)

Tema II: La presentación del logicismo: *los fundamentos de la aritmética*

Primera parte

Ubicación contextual y estructura del texto

1. Contexto histórico específico

- * En su tesis de habilitación "Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Größenbegriffs gründen" (Métodos de cálculo que se basan en una ampliación del concepto de magnitud) propone que toda la aritmética se basa en operaciones iteradas, ilustrando esto con ejemplos de la geometría, que se pueden presentar como funciones e iteraciones de funciones que a su vez se presentan como función: la adición lleva a la multiplicación, ésta a la potenciación, etc.
- * Se mostró que geometrías no-euclidianas son consistentes si la geometría euclidiana lo es, e Hilbert mostró que la geometría euclidiana es consistente si la teoría de números lo es. Frege encontró que hacía falta demostrar la naturaleza de los números naturales y no darla por entendida.
- * La mala recepción de la *Begriffsschrift* (sus contemporáneos consideraron superior la simbología de Boole) le mostró a Frege que tiene que explicar mejor su proyecto: el resultado es *Grundlagen der Arithmetik*.

2. La estructura del texto

2.1 Antecedentes matemáticos y filosóficos, y el objetivo del texto (§§ 1 - 4)

2.2 La naturaleza de los enunciados aritméticos (§§ 5 - 17)

2.2.1 No son juicios sintéticos *a priori* (Kant)

2.2.2 ni *a posteriori* (Mill)

2.2.3 entonces: analíticos (Leibniz)

2.3 El concepto de número y la noción de unidad; uno en la literatura (§§ 18 - 44); la propuesta de Frege para resolver los problemas presentados (§§ 45 - 54)

3. Objetivo:

- * decidir si se puede definir el número o si se debe declarar indefinible.
- * Contribución a la matemática:
 - análisis más preciso de sus conceptos
 - reducción a pocos axiomas
- * Contribución filosófica:
 - aclarar si las verdades aritméticas son
 - a priori o a posteriori
 - sintéticas o analíticas

4. Tres principios de la investigación:

- (i) Lo psicológico y lo lógico, lo subjetivo y lo objetivo, deben ser nítidamente separados (juicios, enunciados, pensamientos vs. intuiciones e ideas).
- (ii) El significado de las palabras se tiene que buscarse en el contexto, no en aislamiento (principio de prioridad proposicional; principio de contexto).
- (iii) Se tiene que tener en cuenta la diferencia entre concepto y objeto.

5. Resumen de las críticas de Frege

5.1 La naturaleza de las leyes aritméticas

- * No se pueden obtener por inducción, ni son empíricas o *a posteriori* (John Stuart Mill)
- * Tampoco son juicios sintéticos *a priori*. ¿De qué naturaleza sería la intuición pura de qué dependen? (Kant)
- * Entonces tienen que ser analíticas, como sugiere Leibniz (con problemas)

5.2 El concepto de número

- * El número no es una propiedad que se puede abstraer de las cosas (como el color, el peso o la dureza).
- * El número no es nada físico, pero tampoco algo subjetivo, como una imagen o idea.
- * El número no surge mediante la adición de una cosa a otra.
- * Las expresiones "multiplicidad", "cantidad", "pluralidad" son indeterminados, por lo que no sirven para explicar el número.
- * Los números tienen diferentes propiedades. Si uno y unidad son siempre lo mismo ¿cómo se puede conciliar esto con que los números son diferentes?
- * En cuanto a las unidades estas deben ser al mismo tiempo iguales y diferenciables.
- * Uno y unidad no es lo mismo: uno es nombre propio de un objeto que no puede tener plural [en alemán, de hecho, ni siquiera existe el plural del artículo neutro, porque suena igual que el número uno: "un hombre" parece ser lo mismo que "1 hombre"].

- * Los números no pueden surgir mediante la acumulación de muchos 1, por lo que en "1 + 1 = 2" el signo de más no puede representar la acción de acumulación de 1 consigo mismo.

6. El concepto de número de Frege

Algunos resultados de las críticas

- * La indicación de un número contiene una afirmación acerca de un concepto.
- * Que la indicación de un número representa un hecho se debe a la objetividad de los conceptos
- * Los atributos de un concepto son diferentes de sus características: éstas son los atributos de los objetos que caen bajo un concepto.
- * El número es un atributo del concepto.
- * La existencia es otro atributo del concepto: que no es vacío (por esto falla la prueba ontológica de Dios, porque la existencia no es una característica del concepto "Dios", ni, por cierto, la unicidad).
- * La característica *puede* ser atributo de un concepto (cuando un concepto cae bajo otro concepto; ejemplo: el concepto de "luna de la Tierra" tiene la unicidad por característica y cae bajo el concepto de unicidad, aunque la Luna misma no).
- * Cada número es un objeto particular
- * **La definición de Leibniz y "el problema de Cesar"**
a un concepto le corresponde el número 0 cuando, sea lo que sea a , vale con toda generalidad el enunciado de que a no cae bajo este concepto.

$$\vdash a \neg F(a)$$

De manera similar podría decirse: a un concepto F le corresponde el número 1, cuando, sea lo que sea a , no vale con toda generalidad el enunciado de que a no cae bajo F , y cuando de los enunciados

« a cae bajo F » y « b cae bajo F »

se sigue con toda generalidad que a y b son el mismo.

Sólo falta aún definir el paso de un número al siguiente. Intentamos la siguiente formulación: al concepto F le corresponde el número $(n+1)$ cuando existe un objeto a que cae bajo F y tal que al concepto «que cae bajo F , pero no a », le corresponde el número n .

Pero: mediante nuestras definiciones, nunca podremos decidir -para dar un ejemplo burdo- si a un concepto le corresponde el numero Julio Cesar, ni si este famoso conquistador de las Galias es un numero o no. [...] Hemos definido el 0 y el 1 solo aparentemente; en realidad, solo hemos fijado el sentido de las frases

«el numero 0 corresponde a»,
«el numero 1 corresponde a»;

pero de ahí no resulta que esté permitido distinguir el 0 y el 1 como objetos particulares, reconocibles siempre que se quiera.

Para obtener el concepto de número, hay que fijar el sentido de una ecuación numérica

§ 62. Pero ¿cómo puede sernos dado un número, si no podemos tener de él ninguna imagen o intuición? **Solamente en el contexto de un enunciado *significan se refieren las palabras a algo****). De lo que se tratará, pues, es de determinar el sentido de un enunciado en el que entre un numeral. Esto, de momento, nos deja todavía con mucha libertad de elección. Pero ya hemos establecido que por numerales hay que entender objetos independientes. Con ello nos han sido dados una especie de enunciados que han de tener sentido: los enunciados que expresan que algo se reconoce de nuevo. Si el signo a debe designar un objeto, tendremos que disponer de un criterio para decidir en cualquier caso si b es lo mismo que a , aun cuando no siempre esté en nuestras manos el poder aplicar este criterio. En nuestro caso deberemos determinar el sentido del enunciado

«el número que corresponde al concepto F es el mismo
que el que corresponde al concepto G»;

esto es, deberemos reproducir el contenido de este enunciado en otra forma, sin emplear la expresión

«el número que corresponde al concepto F».

De este modo, estableceremos un criterio general para la igualdad de números. Después de haber conseguido un medio tal de concebir un número determinado y de reconocerlo como el mismo, podremos darle un numeral como nombre propio.

*) "bedeuten" (antes de 1891!) - Frege toma el significado del contenido conceptual de juicios sobre hechos. En términos general no asume que nombres particulares son etiquetas que funcionan independientemente de los juicios - lo que un nombre significa nos da el análisis en argumento y función, en el caso de los objetos sensibles, con ayuda de la intuición, en el caso de los objetos lógicos, sin esta ayuda. Pero estos juicios no son vacíos, como afirma Kant: «Nuestra naturaleza conlleva el que la *intuición* sólo pueda ser *sensible*, es decir, que no contenga sino el modo según el cual somos afectados por objetos. La capacidad de *pensar* el objeto de la intuición es, en cambio, el *entendimiento*. Ninguna de estas propiedades es preferible a la otra: sin sensibilidad ningún objeto nos sería dado y, sin entendimiento, ninguna sería pensado. Los pensamientos sin contenido son vacíos; las intuiciones sin conceptos son ciegas» (KrV A51/B75, traducción de Pedro Ribas).

Para resumir:

- la vital diferencia entre objeto y concepto; argumento y función
- el principio de contexto