# Algunas observaciones sobre la filosofía de la práctica matemática

PAOLO MANCOSU

## Introducción

LA FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA CONTEMPORÁNEA nos ofrece una gran cantidad de riquezas. Cualquiera que esté familiarizado —incluso parcialmente— con ella, sin duda está al tanto de los recientes trabajos sobre neologicismo, nominalismo, argumentos de indispensabilidad, estructuralismo, etcétera. Gran parte de esos trabajos pueden considerarse como intentos de abordar un conjunto de problemas gnoseológicos y ontológicos que fueron planteados con gran lucidez en dos artículos clásicos de Paul Benacerraf. Los artículos de Benacerraf han sido con razón bastante influyentes, pero su influencia tuvo también una consecuencia indeseada: la de dejar otros temas importantes fuera del tapete. Particularmente, el itinerario marcado por los escritos de Benacerraf para la Filosofía de la Matemática fue el de explicar cómo, si hay objetos abstractos, podemos tener acceso a ellos.

Y esto, en líneas generales, ha sido el problema que los filósofos de la matemática han perseguido durante los últimos cincuenta años. Otra consecuencia del modo en que fue enmarcada la discusión, es que, para ser un estudioso de la teoría del conocimiento matemático, no parecía necesitarse ninguna atención particular a la práctica matemática. Después de todo, el tema de los objetos abstractos nos confronta desde los más elementales niveles de aritmética, geometría y teoría de conjuntos. Parecería que prestar atención a otras ramas de la matemática es irrelevante para resolver los problemas fundamentales de la disciplina. Esto generó una visión extremadamente estrecha de la teoría del conocimiento matemático dentro de la Filosofía de la Matemática dominante, una visión en parte debida a un énfasis desmedido en cuestiones ontológicas.

Considero que el foco fijado en el problema del «acceso» ha limitado a la teoría del conocimiento matemático a un único plano. Yo, conjuntamente con

P. Mancosu (✉)
University of California, Berkeley, EUA
email: mancosu@socrates.berkeley.edu

Disputatio. Philosophical Research Bulletin
Vol. 5, No. 6, Dic. 2016, pp. 131-156
ISSN: 2254-0601 | www.disputatio.eu

ARTÍCULO

los contribuyentes a Mancosu (2008a), considero que la teoría del conocimiento matemático necesita ser extendida más allá de sus confines actuales para abordar temas gnoseológicos que tienen que ver con fecundidad conceptual, evidencia, visualización, razonamiento diagramático, comprensión, explicación, y otros aspectos de la teoría del conocimiento matemático que son ortogonales respecto del problema del acceso a «objetos abstractos».

En cambio, la ontología de la matemática podría también beneficiarse a partir de una mirada más atenta a cómo emergen temas ontológicos interesantes, tanto en conexión con algunos problemas gnoseológicos mencionados anteriormente (como por ejemplo, temas concernientes a la existencia de «géneros naturales» en matemática), como a partir de la práctica matemática en sí misma (temas de la individuación de los objetos y estructuralismo en teoría de las categorías).

Las contribuciones a Mancosu (2008a) así, están unidas por la creencia compartida de que la atención a la práctica matemática es una condición necesaria para la renovación de la filosofía de la matemática. Los autores que contribuyeron a Mancosu (2008a) no están simplemente proponiendo nuevos temas de investigación, sino que también están afirmando que estos temas no pueden ser efectivamente abordados sin extender el rango de la práctica matemática que se necesita mirar cuando se realiza este tipo de trabajo filosófico. Ciertos problemas filosóficos llegan a destacarse sólo cuando el área apropiada de la matemática es tomada en consideración. Por ejemplo, la geometría, la teoría de nodos y la topología algebraica seguramente despertarán interés (y desconcierto filosófico) sobre el tema del razonamiento diagramático y visualización, mientras que otras áreas de la matemática, por ejemplo, la teoría elemental de los números, pueden tener mucho menos para ofrecer en esa dirección. Además, para teorizar acerca de estructuras en filosofía de la matemática parece sensato ir más allá del álgebra elemental, y observar con atención qué está sucediendo en áreas avanzadas, como la cohomología, donde el razonamiento «estructural» es generalizado. Finalmente, algunas áreas de la matemática verdaderamente pueden brindar a la filosofía de la matemática herramientas útiles para abordar importantes problemas filosóficos.

Aquí se puede tender una interesante analogía con la filosofía de las ciencias naturales, que se ha desarrollado bajo la influencia conjunta tanto de las cuestiones sobre metodología general como de las cuestiones metafísicas clásicas, interactuando con los estudios detallados de casos en las ciencias especiales (física, biología, química, etc.). Reveladores estudios de casos han sido tanto históricos (estudios sobre la relatividad de Einstein, la teoría electromagnética de Maxwell, mecánica estadística, etc.) como contemporáneos (exámenes de las fronteras de la teoría cuántica de campos). En contraste, salvo algunas excepciones, la filosofía de la matemática se ha desarrollado sin los correspondientes estudios detallados de casos.

Invitando a una atención renovada a la práctica matemática, los colaboradores de Mancosu (2008a) son los herederos de muchas tradiciones de trabajo en filosofía de la matemática. En el resto de este trabajo, describiré aquellas tradiciones y la medida en la que nos diferenciamos de ellas.

## §1. Dos tradiciones

Muchas de las líneas filosóficas mencionadas en el comienzo (neologicismo, nominalismo, estructuralismo, etc.) fueron elaboradas en estrecha conexión con los clásicos programas fundacionales en matemática, en particular el logicismo, el programa de Hilbert y el intuicionismo. No sería posible encontrar el sentido del neologicismo de Hale y Wright a menos que sea considerado como una proposición para superar el callejón sin salida en que cayó el programa Fregeano como consecuencia del descubrimiento de las paradojas por parte de Russell. Sería aún más difícil de entender el anti–realismo de Dummett sin un conocimiento apropiado sobre el intuicionismo como una posición fundacional. Obviamente haría falta más espacio del que dispongo para rastrear aquí el tipo de genealogía que tengo en mente; pero también en cierto sentido, sería inútil. Pues no puede discutirse que ya en la década de 1960, primero con Lakatos y después a través de un grupo de filósofos inconformistas de la matemática (Kitcher, Tymoczko, y otros)[1], se estableció una fuerte reacción contra la filosofía de la matemática concebida como un fundamento de la matemática. Agregándose al trabajo de Lakatos, la oposición filosófica tomó forma en tres libros: *The Nature of Mathematical Knowledge* (1984) de Kitcher, *History and Philosophy of Modern Mathematics* (1988) de Aspray y Kitcher, y *New directions in the philosophy of mathematics* (1985, 1998) de Tymoczko (pero véase también Davis and Hersch (1980) y Kline (1980) para similares perspectivas provenientes de matemáticos e historiadores). Lo que estos

[1] Tomo prestado el término «inconformista» (*maverick*) de la «opiniated introduction» de Aspray y Kitcher (1988).

filósofos pedían era un análisis de la matemática que fuera más fiel a su desarrollo histórico. Las preguntas que les interesaban eran entre otras: ¿cómo se desarrolla la matemática?, ¿cómo se relacionan los razonamientos informales con los razonamientos formales?, ¿cómo funciona la heurística en la matemática? y ¿hay un límite preciso entre el método de descubrimiento y el método de justificación?

Evaluando la filosofía analítica de la matemática que había surgido de los programas fundacionales, Aspray y Kitcher (1988) lo expresaron de este modo:

> La filosofía de la matemática parece ser un microcosmos que comprende los temas más generales y centrales de la filosofía —temas de teoría del conocimiento, metafísica y filosofía del lenguaje—, y el estudio dedicado a aquellas partes de la matemática de las que los filósofos se ocupan más asiduamente (lógica, teoría de conjuntos, aritmética) parece destinado a testear los méritos de importantes concepciones filosóficas acerca de la existencia de entidades abstractas o la sustentabilidad de una determinada imagen del conocimiento humano . Seguramente no hay nada malo con la persecución de tales investigaciones, por irrelevantes que sean respecto de las preocupaciones de matemáticos e historiadores de la matemática. No obstante, resulta pertinente preguntarse si no existen otras tareas para la filosofía de la matemática, tareas que surjan de la práctica actual de la matemática o por su historia. Un pequeño número de filósofos (incluyendo a uno de nosotros) creen que la respuesta es afirmativa. A pesar de los grandes desacuerdos entre los miembros de este grupo, proponentes de esta tradición minoritaria comparten la idea de que la filosofía de la matemática debería ocuparse con las clases de temas de los que se ocupan aquellos que estudian otras ramas del conocimiento científico (más obviamente las ciencias naturales). Los filósofos deberían plantearse preguntas como las siguientes: ¿cómo crece el conocimiento matemático? ¿qué es el progreso matemático? ¿qué hace que algunas ideas (o teorías) matemáticas sean mejores que otras? ¿qué es una explicación matemática? (Aspray & Kitcher 1988, p. 17)

Concluyeron la introducción afirmando que el estado actual de la filosofía de la matemática revela dos programas generales: uno centrado en los fundamentos de la matemática, y el otro, centrado en articular la metodología de la matemática.

Kitcher (1984) ya había propuesto una explicación sobre el progreso del conocimiento matemático, que constituye uno de los primeros —y también uno de los más notables— estudios sobre metodología de la matemática dentro de la filosofía analítica. Partiendo de la noción de una práctica matemática[2], el objetivo de Kitcher fue dar cuenta de la racionalidad del desarrollo de la matemática en términos de transiciones entre las prácticas matemáticas. Entre los patrones del cambio matemático, Kitcher trató la generalización, la rigorización y la sistematización.

Uno de los rasgos de la tradición «inconformista» fue la polémica contra las ambiciones de la lógica matemática como un canon para la filosofía de la matemática. La lógica matemática, que había sido esencial en el desarrollo de los programas fundacionalistas, era considerada ineficaz para lidiar con las cuestiones concernientes a la dinámica del descubrimiento matemático y al desarrollo histórico de la matemática en sí misma. Por supuesto, esto no significó que la filosofía de la matemática en este nuevo planteamiento fuera reducida a la pura descripción de teorías matemáticas y su desarrollo. Basta recordar que *Proofs and Refutations* de Lakatos se basa en la interacción entre la «reconstrucción racional» expuesta en el texto principal y el «desarrollo histórico» que se ofrece en las notas. La relación entre estos dos aspectos es muy problemática y continúa siendo una de las cuestiones centrales para los estudiosos de Lakatos, y para la formulación de una filosofía dialéctica de la matemática (véase Larvor 1998). Más aún, además de proveer una filosofía empirista de la matemática, Kitcher propuso una teoría del cambio matemático basada en un modelo bastante idealizado (véase Kitcher 1984 capítulos 7–10).

Una caracterización a grandes rasgos de las principales notas de la tradición «inconformista», podría ser expresada del siguiente modo:

a. Antifundacionalismo, i.e. no hay un cimiento cierto para la matemática, la matemática es una actividad falible.
b. Antilogicismo, i.e. la lógica matemática no puede proporcionar herramientas para un análisis adecuado de la matemática y su desarrollo.
c. Atención a la práctica matemática: solamente un detallado análisis y reconstrucción de las partes grandes y significativas de la práctica matemática pueden proveer una filosofía que merezca ese nombre.

[2] Un compuesto de cinco componentes: «un lenguaje, un conjunto de afirmaciones aceptadas, un conjunto de razonamientos aceptados, un conjunto de preguntas seleccionadas como importantes, y un conjunto de opiniones metamatemáticas» (Kitcher 1984, p. 163).

La disolución del límite entre analítico y sintético de Quine también ayudó en esta dirección, porque poner a la matemática a la par de la ciencia natural llevó primero a la posibilidad de un análisis teorético de la matemática en línea con la ciencia natural, y esto condujo a los filósofos a aplicar a la matemática herramientas de análisis que, mientras tanto, se habían hecho bastante populares en la historia y la filosofía de las ciencias naturales (a través de Kuhn, por ejemplo). Esto suscitó interrogantes en analogía con lo ocurrido en las ciencias naturales: ¿Es la matemática revisable? ¿Cuál es la naturaleza del desarrollo matemático? ¿Hay progreso en matemática? ¿Hay revoluciones en matemática?

No hay duda de que los «inconformistas» han logrado extender los límites de la filosofía de la matemática. Además de los trabajos ya mencionados, debería remitir al lector a Gillies (1992), Grosholz y Breger (2000), van Kerchove y van Bengedem (2002, 2007), Cellucci (2002), Krieger (2003), Corfield (2003), Cellucci y Gillies (2005), Ferreirós y Gray (2006), como contribuciones en esta dirección, sin implicar, por supuesto, que los colaboradores de estos libros y compilaciones estén completamente de acuerdo con Lakatos o Kitcher. Asimismo, cabría agregar las muchas monografías publicadas acerca de la filosofía de la matemática de Lakatos, las cuales muchas veces están de acuerdo con sus objetivos y los llevan más allá aun cuando critican a Lakatos en puntos mayores o menores (Larvor 1998, Koetsier 1991; véase también Bressoud 1999).

Sin embargo, la «tradición inconformista» no ha logrado redirigir sustancialmente el curso de la filosofía de la matemática. En todo caso, el predominio de los planteamientos tradicionales ontológicas y gnoseológicas a la filosofía de la matemática en los últimos veinte años prueba que el ala inconformista no logró proporcionar una reorientación significativa del campo. Esto no es una crítica *per se*. Traer a la luz importantes problemas nuevos es una contribución que vale la pena en sí misma. Sin embargo, la actitud iconoclasta de los «inconformistas» frente a lo que se ha realizado en relación con los fundamentos de la matemática tuvo como consecuencia una reducción de su esfera de influencia. Filósofos de la matemática con una formación en lógica y tradicionales estudiosos de la teoría del conocimiento y de la ontología de la matemática sintieron que los «inconformistas» estaban tirando lo malo con lo bueno.

Dentro de los antecedentes tradicionales de la filosofía analítica de la matemática, y exceptuando el caso de Kitcher, la dirección más importante en conexión con la práctica matemática es aquella representada por el naturalismo de Maddy. A grosso modo, uno podría ver en la crítica de Quine a la distinción entre analítico y sintético un paso decisivo para considerar a la matemática, metodológicamente, a la par con la ciencia natural. Esto está especialmente claro en una carta a Woodger, escrita en 1942, donde Quine comenta acerca de las consecuencias proporcionadas por su negación (y la de Tarski) a aceptar la distinción de Carnap entre analítico y sintético. Quine escribió:

> Avances del año pasado. Carnap, Tarski y yo tuvimos muchas sesiones poderosas juntos, a las que se unió Russell en el primer semestre. Las más de las veces Tarski y yo nos enfrentábamos a Carnap en estas cuestiones. (a) La fundamental división sostenida por C[arnap] entre lo analítico y lo sintético son palabras vacías (véase mi «Verdad por convención»), y (b) por consiguiente los conceptos de la lógica y la matemática merecen ser objeto de una crítica empirista o positivista del mismo modo que aquellos de la física. (citado en Mancosu 2005)

El giro que Quine dio a la crítica empirista de la lógica y la matemática a principios de la década del '40 fue el de investigar cuán lejos se podría llevar una concepción nominalista de la matemática. Pero Quine era también consciente de los límites del nominalismo y fue llevado de mala gana a aceptar una forma de platonismo basada en la indispensabilidad, en las ciencias naturales, de cuantificar sobre algunas de las entidades abstractas de la matemática (véase Mancosu 2008b para una explicación acerca del compromiso nominalista de Quine).

No obstante, la atención de Quine a la matemática ha estado siempre dirigida hacia su estructura lógica y no mostró ningún interés particular sobre otros aspectos de la práctica matemática. Aun así, hubo otros caminos para perseguir las posibilidades que las enseñanzas habían abierto. En la sección 3 de este trabajo, trataré las consecuencias que Maddy ha extraído de la posición de Quine. Permítaseme mencionar como un apartado que la analogía entre matemática y física fue también algo que surgió de pensadores que se oponían completamente al empirismo lógico o al empirismo de Quine, especialmente Gödel. Veremos cómo Maddy combina tanto la influencia de Quine como la de Gödel. Su caso es de interés porque su trabajo (a diferencia del de los «inconformistas») se origina en un compromiso activo con la tradición fundacionalista en teoría de conjuntos.

El espíritu general de la tradición que se origina en Lakatos así como el naturalismo de Maddy requieren una gran atención a la práctica matemática. Esto no quiere decir que los programas fundacionales clásicos fueran excluidos de tales problemas. Por el contrario, nada es más lejano de la verdad. Desarrollar un lenguaje formal, como hizo Frege, que tuviera como objetivo capturar formalmente todas las formas válidas de razonamiento que se dieran en matemática, requirió una comprensión profunda de los patrones de razonamiento que se encuentran en la práctica matemática[3]. Entre otras cosas, fue central para el programa de Hilbert, la distinción entre elementos reales e ideales que también tiene origen en la práctica matemática. Una delicada atención a ciertos aspectos de la práctica matemática informa a la contemporánea teoría de la demostración y, en particular, a programas como matemática inversa. Finalmente, el intuicionismo de Brouwer toma su origen de la distinción entre procedimientos constructivos vs. no constructivos, una vez más una distinción importante en los debates acerca de la teoría de los números algebraicos del final del siglo XIX (Kronecker vs Dedekind), por nombrar un área. Además, los desarrollos analíticos en filosofía de la matemática están también, en mayor o menor medida, preocupados por ciertos aspectos de la práctica matemática. Por ejemplo, programas nominalistas, obligan a aquellos comprometidos con la reconstrucción de partes de la matemática y la ciencia natural, a prestar una especial atención a aquellas ramas de la matemática para entender si se puede obtener una reconstrucción nominalista.

Esto no será cuestionado por aquellos que trabajan en la tradición de Lakatos, o por Maddy, o los autores en Mancosu (2008a). Pero en cada caso, la apelación a la práctica matemática es diferente de aquel hecho por la tradición fundacionalista, así como por gran parte de la filosofía analítica tradicional de la matemática. Esta última estaba limitada a un aspecto central, pero estrecho en última instancia, de la variedad de actividades en que los matemáticos se involucran. Esto será abordado en las secciones siguientes.

Mi estrategia para el resto de este artículo será tratar a grandes rasgos las contribuciones de Corfield y Maddy, tomados como filósofos de la matemática representativos profundamente comprometidos con la práctica matemática, aun viniendo de diferentes lados de la división fundacional/inconformista.

[3] Para una lectura de Frege que enfatice la conexión con la práctica matemática véase el próximo libro de Tappenden.

Comenzaré por Corfield, quien sigue el linaje de Lakatos, y después pasaré a Maddy, tomada como un ejemplar de ciertos desarrollos en filosofía analítica. Dentro de estos antecedentes, y en contraste con ellos es que presentaré, en la sección 4, las contribuciones contenidas en Mancosu (2008a) y que articularé, en la sección 5, en qué se diferencian y relacionan con las tradiciones descriptas aquí. Lamentablemente, tendré que abstenerme de tratar muchas otras contribuciones que merecerían un análisis exhaustivo, especialmente Kitcher (1984), pero aquí no aspiro a la completitud.

## §2. *Towards a Philosophy of Real Mathematics* (2003) de Corfield

Un buen punto de partida es el reciente libro de Corfield, *Towards a Philosophy of Real Mathematics* (2003). El trabajo de Corfield encaja perfectamente dentro del marco del debate entre los filósofos de la matemática fundacionalistas y «inconformistas», que he descripto al principio. Corfield atribuye su deseo de trasladarse a la filosofía de la matemática al descubrimiento de *Proof and Refutations* (1976) de Lakatos y él toma como lema para su introducción la famosa paráfrasis que hace Lakatos de Kant:

> La historia de la matemática sin la guía de la filosofía se ha vuelto ciega, mientras que la filosofía de la matemática, al darle la espalda a los fenómenos más fascinantes de la historia de la matemática, se ha vuelto vacía. (Lakatos 1976, p. 2)

La propuesta de Corfield para salir del callejón sin salida es seguir los pasos de Lakatos y propone una filosofía de la matemática «real». Una sucinta descripción de lo que se supone que esto abarca se da en la introducción:

> ¿Qué es entonces una filosofía de la matemática real? La intención de este término es la de trazar una línea entre el trabajo documentado con las preocupaciones de los matemáticos pasados y presentes y aquél hecho sobre la base de, en el mejor de los casos, un contacto nominal con su historia o prácticas. (Corfield 2003, p. 3)

Así, de acuerdo con Corfield, el neologicismo no es una filosofía de la matemática real, pues sus practicantes ignoran casi toda la matemática «real» del siglo XX y la mayoría de los desarrollos históricos en matemática, con la excepción de los debates fundacionales. Además, los temas cultivados por tales filósofos no son de interés para los matemáticos. Para Corfield la filosofía de la matemática contemporánea es culpable de no aprovechar para sí misma el rico tesoro de la historia de la materia, simplemente dejado a un lado como «historia» (¡esto debe decirse con el correspondiente tono despectivo!) en la literatura analítica, por no mencionar un conocimiento de primera mano de la práctica actual. Además,

> Por mucho la mayor parte de la actividad que se realiza bajo el nombre de filosofía de la matemática hace oídos sordos a lo que los matemáticos piensan y han pensado, dejando de lado el desbalanceado interés en las ideas «fundacionales» del período 1880 – 1930, proporcionando muy a menudo una imagen distorsionada de aquél período. (Corfield 2003, p. 5)

Es este «filtro fundacionalista», como Corfield lo llama, el responsable de la pobreza de la filosofía de la matemática contemporánea. Hay dos grandes partes en la empresa de Corfield. La primera, la *pars destruens,* consiste en tratar de desarmar el filtro fundacionalista. La segunda, la *pars construens,* proporciona análisis filosóficos sobre algunos estudios de casos de la corriente principal de la matemática de los últimos setenta años. Sus mayores estudios de casos vienen de la interacción entre la matemática y la ciencia de la computación, y de álgebras n–dimensionales y topología algebraica.

La *pars destruens* comparte con Lakatos y con algunos de sus seguidores una fuerte polémica antilógica y antifundacional. Desafortunadamente, esto ha perjudicado la recepción del libro de Corfield y ha desviado la atención de las cosas buenas contenidas en él. No es mi intención aquí abordar la significatividad de lo que Corfield llama «filtro fundacionalista» o rebatir los argumentos presentados por Corfield para desmantelarlos (sobre esto, véase Bays 2004 y Paseau 2005). Permítaseme mencionar que un acalorado debate sobre este tema tuvo lugar en octubre de 2003 en la lista de e–mails de FOM (*Foundations of Mathematics*). La *pars destruens* en el libro de Corfield se restringe a algunas discusiones en la introducción. La mayor parte del libro está dedicada a mostrar a modo de ejemplo, por decirlo de algún modo, qué sería capaz de hacer la filosofía de la matemática, y cómo podría expandir el rango de temas a investigar. Esta nueva filosofía de la matemática, una filosofía de la «matemática real» aspira a las siguientes metas:

> Continuando el enfoque de Lakatos, los investigadores creen aquí que una filosofía de la matemática debería ocuparse con aquellos logros de los matemáticos más importantes de su tiempo, de cómo se han desarrollado sus estilos, de cómo justifican las líneas mediante las cuales conducen sus programas, de cuáles son los obstáculos a sus programas, de cómo

> llegaron a estimar un dominio digno de estudio, y de cómo sus ideas moldean las preocupaciones de físicos y otros científicos, y son moldeados por ellas. (p. 10)

Esto abre un amplio programa que persigue, entre otras cosas, la naturaleza dialéctica de los desarrollos matemáticos, la lógica del descubrimiento en la matemática, la aplicabilidad de la matemática a las ciencias naturales, la naturaleza del modelizar en matemática, y qué da cuenta de la productividad de ciertos conceptos en matemática.

Más precisamente, aquí hay una lista de temas que motivan largas partes del libro de Corfield:

1. ¿Por qué algunas entidades matemáticas son importantes, naturales y fructíferas mientras que otras no lo son?
2. ¿Qué da cuenta de la conexión en la matemática? ¿Cómo es que conceptos desarrollados en una parte de la matemática repentinamente resultan estar conectados a conceptos aparentemente no relacionados, en otras áreas?
3. ¿Por qué las demostraciones computacionales son incapaces de proporcionar el tipo de entendimiento al que aspiran los matemáticos?
4. ¿Cuál es el rol de la analogía y los otros tipos de razonamiento inductivo en matemática? ¿Puede el Bayesianismo aplicarse a la matemática?
5. ¿Cuál es la relación entre el pensamiento diagramático y el razonamiento formal? ¿Cómo dar cuenta de la productividad del razonamiento diagramático en la topología algebraica?

Por supuesto, muchos de estos temas ya habían sido tratados en la bibliografía antes de Corfield, pero su libro fue el primero en unificarlos. Así, la filosofía de la matemática propuesta por Corfield expone los tres rasgos del acercamiento de los inconformistas mencionados en el comienzo. En comparación con contribuciones anteriores en aquella tradición, el expande el conjunto de temas que pueden ser investigados productivamente, y parece estar menos preocupado que Lakatos y Kitcher por generar una gran teoría del cambio matemático. Su énfasis está en los estudios de casos más localizados. Los fundacionalistas y la tradición analítica en filosofía de la matemática están descartados como irrelevantes a la hora de abordar los problemas más apremiantes para una «real» filosofía de la matemática. En la sección 5, haré un comentario sobre cómo el programa de Corfield se relaciona con las contribuciones en Mancosu (2008a).

## §3. Penelope Maddy sobre la práctica matemática

La fidelidad a la práctica matemática es para Maddy un criterio de adecuación para una filosofía de la matemática satisfactoria (Maddy 1990, p. 23 y p. 28). En su libro de 1990, *Realism in Mathematics,* tomó su origen de la teoría naturalizada del conocimiento de Quine (no hay filosofía primera; la ciencia natural es tribunal de arbitraje aún para su propia metodología) y de formas del argumento de indispensabilidad. Su realismo se originó de una combinación del Platonismo de Quine, con el de Gödel. Pero Maddy es también crítica de ciertos aspectos de los platonismos de Quine y Gödel, pues afirma que ambos fallan en capturar ciertos aspectos de la experiencia matemática. En particular, ella encuentra objetable que las matemáticas no aplicadas no obtengan un derecho de ciudadanía en el relato de Quine (véase Quine 1984, p. 788) y, *contra* Quine, enfatiza la autonomía de la matemática respecto de la física. En cambio, el estilo Gödeliano de platonismo respeta la autonomía de la matemática, pero su debilidad consiste en la postulación de una facultad de intuición en analogía con la percepción en las ciencias naturales. Gödel apeló a tal facultad de intuición para dar cuenta de aquellas partes de la matemática frente a las cuales se puede dar una justificación «intrínseca». Sin embargo, hay partes de la matemática para las que tales justificaciones «intrínsecas», intuitivas no se pueden dar, y para ellas, uno apela a justificaciones «extrínsecas», esto es, una justificación en términos de sus consecuencias. *Realism in mathematics* apunta a proveer tanto una teoría naturalizada del conocimiento que reemplace la intuición de Gödel, como también un estudio detallado de la práctica de la justificación extrínseca. Es este último aspecto del proyecto que lleva a Maddy, en el capítulo cuatro, a estudios metodológicos bastante interesantes, que abarcan, entre otras cosas, el estudio de las siguientes nociones y aspectos de la metodología matemática: consecuencia verificable; poderosos nuevos métodos para resolver problemas preexistentes; teorías simplificadoras y sistematizadoras; la implicación de conjeturas previas; la implicación de resultados «naturales»; fuertes conexiones interteóricas; la obtención de nuevas comprensiones de un teorema viejo (véase Maddy 1990, pp. 145–46). Estos son todos aspectos de gran importancia para una filosofía de la matemática que quiera explicar la práctica matemática. El estudio de Maddy en el capítulo cuatro se enfoca en justificar nuevos axiomas para la teoría de conjuntos (V=L o SC [existe un cardinal supercompacto]). Al final su análisis de la situación contemporánea conduce a exigir un análisis más profundo de la «formación y confirmación de teorías»:

> Lo que se necesita no es únicamente una descripción de razonamientos no demostrativos, sino una explicación de por qué y cuándo estos son confiables, una explicación que ayude a los estudiosos en teoría de conjuntos a hacer una elección racional entre candidatos a axiomas en competencia. (Maddy 1990, p. 148)

Y esto es descripto como un problema abierto no sólo para el «platonista de compromiso», sino también para un amplio espectro de posiciones. De hecho, en la p. 180, recomienda compromiso con tales problemas de racionalidad, «incluso para aquellos filósofos dichosamente no involucrados en el debate sobre platonismo» (p. 180).

En *Naturalism in Mathematics* (1997), el realismo defendido en *Realism in Mathematics* es abandonado. Pero ciertas características sobre cómo debería ser explicada la práctica matemática son reservadas. En efecto, lo que parecía un problema metodológico independiente en el primer libro, llega a ser para Maddy el problema central del nuevo libro, y un problema que conduce al abandono del realismo en favor del naturalismo. Esto tiene lugar en dos etapas. Primero, critica la contundencia de los argumentos de indispensabilidad. Segundo, aborda positivamente los tipos de consideraciones que los estudiosos de teoría de conjuntos usan cuando consideran nuevos axiomas, el estado de las afirmaciones independientes de ZFC, o cuando debaten nuevos métodos, e intenta abstraer de ellos máximas metodológicas más generales.

Su posición en la relación entre filosofía y matemática es clara y constituye el corazón de su naturalismo:

> Si nuestra explicación de las matemáticas entra en conflicto con la práctica matemática exitosa, es la filosofía la que tiene que ceder. Esto, en sí, no es una filosofía de la matemática; más bien, se trata de una posición sobre las relaciones apropiadas entre la filosofía de la matemática y la práctica de las matemáticas. Apreciaciones similares se encuentran en los escritos de de muchos filósofos de la matemática que mantienen que el objetivo de la filosofía de la matemática es justificar las matemáticas, tal como son practicadas, no para recomendar reformas. (Maddy 1998, p. 161)

El naturalismo, en el sentido de Maddy, reconoce la autonomía de la matemática respecto de la ciencia natural. Maddy aplica su naturalismo a un estudio metodológico de las consideraciones llevando a la comunidad matemática a la aceptación o el rechazo de varios axiomas (de la teoría de conjuntos). Ella concibe la formulación de un «modelo naturalizado de práctica» (p. 193) que proveerá «una imagen precisa de la actual práctica justificatoria de la teoría de conjuntos contemporánea, y que esta estructura justificatoria sea completamente racional» (pp. 193–94). El método procederá identificando las metas de cierta práctica y evaluando la metodología empleada en esa rama de la matemática (teoría de conjuntos, en el caso de Maddy) en relación con estas metas (p. 194). El modelo naturalizado de práctica está tanto purificado como ampliado. Está purificado en el sentido de que elimina consideraciones sobre dinámicas de justificación aparentemente irrelevantes (como por ejemplo las filosóficas); y está ampliado en el sentido de que los factores relevantes están sujetos a un análisis más preciso que el que se da en la práctica misma y también se aplican a situaciones posteriores:

> Nuestro naturalista, entonces, afirma que este modelo refleja correctamente la estructura justificatoria de la práctica, esto es, que el material eliminado es verdaderamente irrelevante, que los objetivos identificados están entre los objetivos reales de la práctica (y que los diferentes objetivos interactúan tal como se los ha mostrado), y que el razonamiento de medios a fines empleado es sólido. Si estas afirmaciones son verdaderas, entonces la práctica, en la medida en que se aproxima al modelo naturalista, es racional (Maddy 1998, p. 197)

Así, usando el ejemplo de la hipótesis del continuo (CH) y otras afirmaciones independientes en teoría descriptiva de conjuntos, pasa a explicar cómo la meta de producir «una teoría completa de conjuntos de números reales» aporta un respaldo racional a la investigación de CH (y otras cuestiones en teoría descriptiva de conjuntos). Las herramientas para tales investigaciones serán matemáticas y no filosóficas. Mientras que un caso racional a favor o en contra de CH no puede ser construido a partir de la metodología que Maddy destila de la práctica, ella provee un caso contra V=L (un axioma que Quine apoya).

No necesitamos inquirir en los detalles del análisis que Maddy hace de sus estudios de casos y la identificación de muchos principios metodológicos, como *maximizar* y *unificar*, que en su análisis final dirige la práctica de los estudiosos de la teoría de conjuntos, y constituye el centro de su caso contra V=L. Preferiblemente, permítasenos estudiar la situación.

Comparando el planteamiento de Maddy con aquella de la tradición de los «inconformistas», podemos observar que precisamente como en la tradición «inconformista», hay un desplazamiento en los problemas que Maddy se propone investigar. Sin negar que los problemas ontológicos y gnoseológicos también merecen investigación, ella ha decidido enfocarse en un aspecto de la metodología de la matemática completamente ignorado en la anterior filosofía analítica de la matemática. Esta es una vasta área temática relativa al tipo de argumentos que se usan para la decisión a favor o en contra de ciertos nuevos axiomas en la teoría de conjuntos. La anterior filosofía analítica de la matemática hubiera relegado esto al «contexto de descubrimiento», y como tal, no merecedor o apto para la investigación rigurosa. Maddy argumenta que estas decisiones son racionales y pueden ser explicadas a través de un modelo naturalista que explicite los procedimientos y máximas que dirigen la práctica. El proyecto de Maddy puede ser visto como una contribución al problema general de cómo funcionan la evidencia y la justificación en la matemática. Esto se puede ver como relacionado con un estudio sobre «heurística» aunque esto debe ser tomado en el sentido apropiado, pues sus estudios de casos no pueden confundirse, o ser reducidos a estudios tradicionales sobre «resolución de problemas». Otro aspecto del trabajo de Maddy que une su enfoque al de los inconformistas es la atracción hacia la historia de la lógica y la matemática como un componente central en su explicación naturalizada. Esto no sorprende: la práctica matemática está personificada en el trabajo concreto de los matemáticos, y ese trabajo ha tenido lugar en la historia. Aunque Maddy, a diferencia de Kitcher (1984), no está proponiendo una explicación abarcadora de la racionalidad de los cambios en la práctica matemática, o una teoría del crecimiento matemático, los estudios de casos que investigó, la han llevado a considerar porciones de la historia del análisis y de la teoría de conjuntos. La historia de la teoría de conjuntos (hasta su estado actual) es el «laboratorio» para la destilación del modelo naturalista de la práctica. Finalmente, una gran diferencia en la actitud entre Maddy y los «inconformistas», es la falta, por parte de Maddy, de alguna polémica contra la lógica y los fundamentos. Más bien, su ambición es la de encontrar el sentido de la racionalidad interna del trabajo fundacional en la teoría de conjuntos.

## §4. Un resumen de las contribuciones incluidas en el libro *The Philosophy of Mathematical Practice*

El escueto contraste que se usó para presentar las diferentes direcciones del trabajo filosófico sobre la práctica matemática en las secciones 2 y 3 no sería apropiado para caracterizar algunas de las más recientes contribuciones en esta área, en la cual a menudo coexiste una variedad de visiones. Esto se da especialmente en los volúmenes *Perspectives on mathematical practices* (van Kerchove y van Bengedem 2002 y 2007) que contienen una variedad de contribuciones, algunas de las cuales encuentran su inspiración en la tradición inconformista, otras en el trabajo de Maddy, y otras aún señalan el camino hacia desarrollos independientes. Consideraciones similares se aplican a Mancosu *et al.* (2005), aunque en contraste con las dos colecciones anteriores, este libro no tiene su inspiración en Lakatos. Contiene un amplio espectro de contribuciones en visualización, explicación y estilos de razonamiento en matemática llevadas a cabo tanto por filósofos como por historiadores de la matemática. Los volúmenes mencionados más arriba, contienen contribuciones que coinciden en tema y/o inspiración con los de Mancosu (2008a). Sin embargo, Mancosu (2008a) es más sistemático y está más concentrado en sus objetivos.

Los ocho temas estudiados allí son:

1. Visualización
2. Razonamiento diagramático
3. Explicación
4. Pureza de métodos
5. Conceptos y definiciones
6. Aspectos filosóficos de los usos de la ciencia de la computación en matemática
7. Teoría de las categorías
8. Física matemática

Tomados en conjunto, representan un amplio espectro de la reflexión filosófica contemporánea sobre los diferentes aspectos de la práctica matemática. Cada autor (con una excepción que será mencionada más abajo) escribió una introducción general al área temática y un trabajo en esa área. No resumiré aquí cada contribución a Mancosu (2008a), sino que más bien señalaré por qué cada área temática es realmente de interés actual.

La primera sección es sobre *visualización*. Los procesos de visualización (por ejemplo, por medio de imágenes mentales) son centrales para nuestra actividad matemática y recientemente esto se ha convertido una vez más en un tema central de interés debido a la influencia de las imágenes por computadora en la geometría diferencial y la teoría del caos y también, debido a la necesidad de enfoques visuales a la geometría, la topología y el análisis complejo. ¿Pero en qué sentido la imagen mental puede proporcionarnos conocimiento matemático? ¿La visualización no debería estar relegada a la heurística? Marcus Giaquinto (University College London) sostiene en su introducción que la visualización matemática puede jugar un rol epistémico. Después, en su trabajo, procede a examinar el rol de los recursos visuales en la captación cognitiva de estructuras.

La segunda sección se titula *razonamiento diagramático*. En los últimos veinte años ha habido una explosión de interés debida también a la importancia de tales sistemas diagramáticos para la inteligencia artificial y para su uso extendido en ciertas ramas de la matemática contemporánea (teoría de nodos, topología algebraica, etc.). Ken Manders (University of Pittsburgh) fija la mirada de su introducción en algunos temas filosóficos centrales que emergen del razonamiento diagramático en geometría y en su trabajo aborda el problema de la estabilidad del razonamiento diagramático en la geometría euclidiana.

Si a los matemáticos les importara solamente la verdad de ciertos resultados, sería difícil de entender por qué después de descubrir una cierta verdad matemática, continúan probando el resultado de varios modos diferentes. Esto sucede porque diferentes pruebas o diferentes presentaciones de áreas enteras de la matemática (análisis complejo, etc.) tienen diferentes virtudes epistémicas. *La explicación* está entre las más importantes virtudes que buscan los matemáticos. Muy a menudo la prueba de un resultado matemático nos convence *de que* el resultado es verdadero pero no nos dice *por qué* es verdadero. Pruebas alternativas, o formulaciones alternativas de teorías enteras, son presentadas frecuentemente con este objetivo explicativo en mente. En la introducción, muestro que el tema de la explicación matemática tiene implicaciones filosóficas de amplio alcance y después procedo en el trabajo conjunto con Johannes Hafner (North Carolina State), a probar el modelo de la explicación matemática de Kitcher en términos de unificación por medio del estudio de un caso de la geometría algebraica real.

El ideal de *pureza de métodos* en matemática está relacionado con el tema de las virtudes epistémicas de las diferentes demostraciones matemáticas. La noción de pureza ha jugado un rol importante en la historia de la matemática —considérese, por ejemplo, la eliminación de la intuición geométrica del desarrollo del análisis en el siglo XIX— y en un sentido, subyace bajo todas las investigaciones que implican temas de conservatividad en la teoría de la demostración contemporánea. Que la pureza está a menudo valorada en la práctica matemática se hace obvio por el hecho de que Selberg fue premiado con la medalla Fields por la demostración elemental del teorema de los números primos (ya demostrada con herramientas analíticas a finales del siglo XIX). ¿Pero por qué los matemáticos valoran la pureza? ¿Qué puede ser ganado gnoseológicamente por medio de pruebas que excluyan apelar a los elementos «ideales»? La teoría de la demostración nos ha dado un rico análisis de cuándo los elementos ideales pueden ser eliminados en principio (resultados de conservatividad) pero lo que la teoría de la demostración deja abierto es la cuestión filosófica de por qué, y si nosotros, deberíamos buscar o bien el uso, o bien la eliminación de tales elementos ideales. Michael Detlefsen (University of Notre Dame) ofrece una introducción general histórica y conceptual a este tema. Esto está seguido por un estudio de la pureza en el trabajo de Hilbert sobre los fundamentos de la geometría escrito por Michael Hallett (McGill University). Además de enfatizar el rol epistémico de la pureza, también muestra que en la práctica matemática, la dialéctica entre pureza e impureza es frecuentemente de hecho muy sutil.

Los matemáticos parecen tener una muy buena percepción de cuándo un concepto matemático particular o una teoría es productiva o «natural». Un cierto concepto podría ofrecer el escenario «natural» para todo un desarrollo y revelar esto por medio de su productividad en unir un amplio grupo de resultados o abriendo nuevas visiones inesperadas. Pero cuando los matemáticos apelan a tales virtudes de conceptos (productividad, naturalidad, etc.), ¿están simplemente desplegando gustos subjetivos o hay características objetivas que pueden ser sometidas a un análisis filosófico capaz de dar cuenta de la racionalidad y objetividad de tales juicios? Este es el tema del capítulo introductorio sobre «Concepts and Definitions» escrito por Jamie Tappenden (University of Michigan), quien ya ha publicado sobre estos temas en relación a la geometría y el análisis complejo en el siglo XIX. Su trabajo relaciona el tema con exposiciones acerca de la naturalidad en metafísica contemporánea y después trata el planteamiento conceptual de Riemann al análisis como un ejemplo desde la práctica matemática, en el cual las definiciones naturales dan lugar a resultados productivos.

La influencia de la *ciencia de la computación* en matemática contemporánea ya ha sido mencionada en conexión con la visualización. Pero las aplicaciones de la computadora son ahora generalizadas en la matemática contemporánea, y alguno de los aspectos de esta influencia, como por ejemplo la demostración por computadora del teorema de los cuatro colores, han sido popularizadas sensacionalmente. Las computadoras proporcionan una ayuda al descubrimiento matemático: proporcionan una confirmación experimental, inductiva de las hipótesis matemáticas; llevan a cabo cálculos necesarios para las pruebas; y permiten a uno obtener una verificación formal de las pruebas. En la introducción a esta sección, Jeremy Avigad (Carnegie Mellon University) trata los desafíos que la filosofía tendrá que enfrentar cuando aborde estos nuevos desarrollos. En particular, él pide una extensión de la corriente teoría del conocimiento matemático que vaya a abordar los temas que el uso de las computadoras en matemática hace urgente, como por ejemplo el problema de caracterizar la evidencia matemática y la comprensión matemática. En su trabajo, el pasa a concentrarse en ella, y allí, en una inversión de perspectiva, él muestra cómo la verificación formal puede ayudarnos a desarrollar una concepción de la comprensión matemática y de esa manera, también mostrar que la teoría del conocimiento matemático puede informar y ser informada por la investigación en la ciencia de la computación.

Algunos de los más espectaculares logros conceptuales en la matemática del siglo XX están relacionados con los desarrollos de la *teoría de las categorías* y su rol en áreas como geometría algebraica, topología algebraica, y algebra homológica. La teoría de las categorías es de interés para el filósofo de la matemática, tanto por causa de la afirmación hecha en su nombre como un marco alternativo fundacional para toda la matemática (alternativo a la teoría de conjuntos de Zermelo–Fraenkel) como por su poder de unificación y la productividad revelada en las áreas antes mencionadas. Colin McLarty (Case Western Reserve University) dedica su introducción a explicar con detalle cómo el estructuralismo involucrado en mucha de la matemática contemporánea amenaza a ciertos proyectos reduccionistas influenciados por los formulados en consideración de los fundamentos de la teoría de conjuntos y después procede a argumentar que solo una detallada atención al estructuralismo personificado en la práctica (no como otros estructuralismos filosóficos) puede dar cuenta de ciertos aspectos de la matemática contemporánea, como por ejemplo, el «espíritu unificador» que la impregna. En su trabajo él ve los *esquemas* como una herramienta para seguir las conjeturas de Weil sobre la teoría del número como un estudio de caso para ver cómo trabaja el «estructuralismo» en la práctica. En el proceso, él pinta un sorprendente cuadro de cómo las ideas estructuralistas y categóricas se desarrollaron desde Noether hasta Grothendieck, pasando por Eilenberg y McLane.

Finalmente, el último capítulo trata acerca de los problemas planteados por algunos desarrollos recientes en *física matemática* y cómo éstos afectan a la matemática pura. En el tercer cuarto del siglo XX, lo que parecía un divorcio inevitable entre la física y la matemática pura, se convirtió en una interesante renovación de los votos. Los desarrollos en la matemática pura resultaron ser increíblemente productivos para la física matemática y, viceversa, desarrollos altamente especulativos en física matemática terminaron produciendo resultados extremadamente productivos en matemática (por ejemplo, en topología en dimensiones bajas). Sin embargo, los estándares de aceptabilidad entre las dos disciplinas son muy diferentes. Alasdair Urquhart (University of Toronto) describe en su introducción alguna de las características principales de esta renovada interacción y los problemas filosóficos sugeridos por una variedad de argumentos físicos, los cuales, a pesar de su productividad, no resultaron ser tan rigurosos. Esto es buscado en su trabajo donde se tratan muchos ejemplos de pruebas «no rigurosas» en matemática y física, con la sugerencia de que los lógicos y los matemáticos no deberían desestimar estos desarrollos, sino más bien, tratar de entender estas partes no regladas del universo matemático y de traer las percepciones de los físicos hacia el campo del argumento riguroso.

## §5. Una comparación con desarrollos previos

Ha llegado el momento de expresar cómo Mancosu (2008a) se diferencia de las anteriores tradiciones de trabajos en filosofía de la práctica matemática. Permítaseme comenzar con la tradición de Lakatos. Hay ciertamente un notable número de diferencias. Antes que nada, Lakatos y muchos de los lakatosianos (por ejemplo, Lakatos 1976, y Kitcher 1984) estaban bastante preocupados por temas metafilosóficos tales como: ¿de qué manera la historia y la filosofía de la matemática encajan juntas? ¿Cómo se desarrolla la matemática?

¿Es racional el proceso de crecimiento? El objetivo de los autores en Mancosu (2008a) es mucho más restringido. Sin desestimar estas cuestiones, nosotros[4] creemos que una buena cantidad de humildad es necesaria para evitar el riesgo de teorizar sin mantener los pies en la tierra. Es interesante notar que un reciente volumen escrito por historiadores y filósofos de la matemática, Ferreiros y Gray (2006), también muestra la misma modestia respecto de estos temas metafilosóficos. Al mismo tiempo, el número de temas que mencionamos es enormemente más vasto que los temas abordados por la tradición de Lakatos. Visualización, razonamiento diagramático, pureza de métodos, teoría de categorías, física matemática y muchos otros temas que nosotros investigamos están llamativamente ausentes en una tradición que ha hecho de su atención a la práctica matemática, su grito de guerra. Una excepción aquí es Corfield (2003), quien de hecho sí menciona muchos de los temas que nosotros estudiamos. Sin embargo, y esto es otro punto importante, diferimos de Corfield en dos puntos esenciales. En primer lugar, nosotros no nos involucramos en la polémica con la tradición fundacionalista y, de hecho, muchos de nosotros trabajamos, o hemos trabajado también como lógicos matemáticos (por supuesto, existen diferencias de actitud, frente a los fundamentos, entre los colaboradores). En líneas generales, nosotros estamos exigiendo una extensión de la filosofía de la matemática que sea capaz abordar temas que la tradición fundacionalista ha ignorado. Pero eso no significa que nosotros pensemos que los logros de esta tradición deban ser descartados o ignorados como temas irrelevantes para la filosofía de la matemática. En segundo lugar, a diferencia de Corfield, no desestimamos la tradición analítica en filosofía de la matemática sino que, más bien, buscamos extender sus herramientas a una variedad de áreas que, en líneas generales, han sido ignoradas. Por ejemplo, por nombrar uno entre muchos, el capítulo sobre la explicación (pp. 134–178) mostró cómo el tema de la explicación matemática está conectado a dos grandes áreas de la filosofía analítica, los argumentos de indispensabilidad y los modelos de explicación científica. Pero esta nota conciliatoria no debería ocultar la fuerza de nuestro mensaje: creemos que los aspectos de la práctica matemática que nosotros investigamos son absolutamente necesarios para un entendimiento de la matemática y que haberlos ignorado ha empobrecido drásticamente la filosofía analítica de la matemática.

[4] Usaré «nosotros» para referirme al amplio espíritu colectivo que tiñe las contribuciones a Mancosu (2008a).

En la tradición de Lakatos, fue Kitcher en particular quien intentó construir un puente con la filosofía analítica. Por ejemplo, mientras se ocupaba del concepto de explicación en filosofía de la ciencia, se aseguró de que la explicación matemática fuera también tomada en consideración. Nosotros somos menos ambiciosos que Kitcher, por cuanto no proponemos una teoría del conocimiento y una ontología de la matemática unificadas y una teoría de cómo el saber matemático crece racionalmente. Pero somos mucho más ambiciosos en otro aspecto, en que cubrimos un amplio espectro de estudios de casos que surgen de la práctica matemática, a la cual sometemos a una investigación analítica. Así, además del caso de la explicación ya mencionado, Giaquinto (pp. 22–64) investigó si el conocimiento sintético a priori puede obtenerse apelando a experiencias de visualización; Tappenden (pp. 276–301) se dedicó al reciente trabajo en metafísica al discutir la productividad y la naturalidad de los conceptos; y MacLarty (pp. 354–406) mostró cómo el estructuralismo en la práctica matemática nos puede ayudar a evaluar filosofías de la matemática estructuralistas. De hecho, la totalidad de Mancosu (2008a) es un intento por extender los límites de la teoría del conocimiento matemático mucho más allá del problema sobre cómo podemos acceder a las entidades abstractas.

Pero yendo a los desarrollos analíticos relacionados con el trabajo de Maddy, debería señalar que mientras que Maddy ha restringido sus investigaciones a la teoría de conjuntos, nosotros adoptamos una perspectiva mucho más amplia sobre la práctica matemática tomando nuestros estudios de casos de la geometría, análisis complejo, geometría algebraica real, teoría de categorías, ciencia de la computación y física matemática. Una vez más, consideramos que, mientras la teoría de conjuntos es un tópico muy importante de la investigación metodológica, hay fenómenos centrales que serán ignorados, a menos que arrojemos nuestra red más ampliamente y extendamos nuestra investigación a otras áreas de la matemática. Además, mientras el estudio de Maddy sobre la metodología de la teoría de conjuntos tiene algunos puntos de contacto con nuestras investigaciones (evidencia, productividad, elección de teorías), nosotros miramos hacia un conjunto de temas mucho más amplio, que nunca surgen, para discutir en su trabajo (visualización, pureza de métodos, explicación, rigor en física matemática). El punto de contacto más cercano entre sus investigaciones y este libro, probablemente sea la discusión sobre la evidencia en la introducción de Avigad (pp. 302–316). Además, no hay un explícito compromiso en nuestras contribuciones con la forma del naturalismo matemático propuesto por Maddy; en realidad, el espíritu de muchas de nuestras contribuciones parece ir en contra del núcleo de su postura filosófica.

Permítaseme concluir volviendo a la comparación con la situación en la filosofía de la ciencia. Mencioné al comienzo que la reciente filosofía de la ciencia se ha desarrollado bajo la interacción de problemas tradicionales (realismo vs. instrumentalismo, causalidad, etc.) con estudios más localizados en las filosofías de las ciencias especiales. En general, filósofos de la ciencia están felices de asegurar que ambas áreas son vitales para la disciplina. Corfield toma como el modelo para su visión de la filosofía de la matemática, los estudios localizados en filosofía de la física, pero decreta que la filosofía de la matemática clásica es una actividad inútil (véase Pincock 2005). En lo que respecta a Maddy, ella escapa de los tradicionales temas ontológicos y gnoseológicos (realismo, nominalismo, etc.) por medio de su naturalismo. Lo que es distintivo de Mancosu (2008a) es que nosotros integramos estudios locales con filosofía de la matemática general, a diferencia de Corfield, y también mantenemos en juego los tradicionales temas ontológicos y gnoseológicos, a diferencia de Maddy.

En este trabajo mi objetivo no ha sido hacer ninguna comparación odiosa, sino sólo ofrecer una justa explicación sobre aquello que las tradiciones anteriores han logrado, y por qué pienso que colectivamente los colaboradores de Mancosu (2008a) han conseguido algo que vale la pena proponer al lector. Somos muy conscientes de estar dando los primeros pasos en un área muy difícil y esperamos que nuestros esfuerzos lleguen a estimular a otros a hacerlo mejor.[*]

[*] El presente artículo es una versión ligeramente modificada de la «Introducción» a Mancosu (2008a), y que fue pronunciada como conferencia en el marco del Simposio de Filosofía de la Práctica Matemática el 13 de junio de 2012 en la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires. Me gustaría agradecer a Jeremy Avigad, Paddy Blanchette, Marcus Giaquinto, Chris Pincock, Thomas Ryckman, José Sagüillo y a Jamie Tappenden por sus valiosos comentarios en un borrador anterior. Así mismo, a Javier Legris por haber sugerido la posibilidad de publicar este artículo en español, y a Esteban I. Perini y María Florencia Ragone por haber aceptado traducir el artículo. Finalmente, agradezco a Oxford University Press el haberme otorgado el permiso para editarlo en español.

## REFERENCIAS

ASPRAY, William y KITCHER, Philip (1988). *History and Philosophy of Modern Mathematics.* Minneapolis: University of Minnesota Press.

BAYS, Timothy (2004), «Review of Corfield's *Towards a Philosophy of Real Mathematics*». *Notre Dame Philosophical Reviews*. January. http://ndpr.nd.edu/review.cfm?id=1042.

BRESSOUD, David (1999). *Proofs and Confirmations: the story of the alternating sign matrix conjecture*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9780511613449

CELLUCCI, Carlo (2002). *Filosofia e Matematica*. Bari: Laterza.

CELLUCCI, Carlo y GILLIES, Donald (eds.) (2005). *Mathematical Reasoning and Heuristics*. Londres: King's College Publications.

CORFIELD, David (2003). *Towards a Philosophy of Real Mathematics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9780511487576

DAVIS, Philip y HERSH, Reuben (eds.) (1980). *The Mathematical Experience*. Basel: Birkhäuser.

GILLIES, Donald (ed.) (1992). *Revolutions in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

FERREIROS, José y GRAY, Jeremy (eds.) (2006). *The Architecture of Modern Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

GROSHOLZ, Emily y BREGER, Herbert (2000). *The Growth of Mathematical Knowledge*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. DOI: 10.1007/978-94-015-9558-2

HERSH, Reuben (2006). *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*. New York: Springer. DOI: 10.1007/0-387-29831-2

KITCHER, Philip (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford: Oxford University Press.

KLINE, Morris (1980). *Mathematics. The Loss of Certainty*. Oxford: Oxford University Press.

KOETSIER, Teun (1991). *Lakatos' Philosophy of Mathematics: A Historical Approach*. Amsterdam: North–Holland.

KRIEGER, Martin (2003). *Doing Mathematics: Convention, Subject, Calculation, Analogy*. Singapore: World Scientific Publishing. DOI: 10.1142/5133

LAKATOS, Imre (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9781139171472

LARVOR, Brendan (1998). *Lakatos: An Introduction*. Londres: Routledge.

MADDY, Penelope (1990). *Realism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

MADDY, Penelope (1997), *Naturalism in Mathematics*. Oxford, Clarendon Press.

MANCOSU, Paolo (2005). «Harvard 1940–41: Tarski, Carnap and Quine on a finitistic language of mathematics for science». *History and Philosophy of Logic* 26: pp. 327–357. DOI: 10.1080/01445340500141586

MANCOSU, Paolo (ed.) (2008a). *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford: Oxford University Press.

MANCOSU, Paolo (ed.) (2008b). «Quine and Tarski on Nominalism». En: *Oxford Studies in Metaphysics* IV, editado por Dean Zimmerman. Oxford: Oxford University Press, pp. 22–55.

MANCOSU, Paolo, JØRGENSEN, Klaus Frovin y PEDERSEN, Stig Andur (eds.) (2005). *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*. Dordrecht: Springer.

PASEAU, Alexander (2005). «What the foundationalist filter kept out». *Studies in History and Philosophy of Science* 36: pp. 191–201. DOI: 10.1016/j.shpsa.2004.12.012

PINCOCK, Christopher (2005). «Review of David Corfield's Towards a *Philosophy of Real Mathematics*». *Philosophy of Science* 72: pp. 632–634. DOI: 10.1086/505449

QUINE, Willard Van Orman (1984). «Review of Parson's *Mathematics in Philosophy*». *Journal of Philosophy* 81: pp. 783–94. DOI: 10.2307/2026033

TAPPENDEN, Jamie (en prensa). *Philosophy and the Origins of Contemporary Mathematics: Frege in his Mathematical Context*. Oxford, Oxford University Press.

TYMOCZKO, Thomas (ed.) (1985). *New Directions in the Philosophy of Mathematics: An Anthology*. Revised and Expanded Edition. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1998.

VAN KERKHOVE, Bart y VAN BENGEDEM, Jean Paul (eds.) (2002). *Perspectives on Mathematical Practices*. Número especial de *Logique et Analyse* 45 (179–180): pp. 235–437.

VAN KERKHOVE, Bart y VAN BENGEDEM, Jean Paul (eds.) (2007). *Perspectives on Mathematical Practices: Bringing Together Philosophy of Mathematics, Sociology of Mathematics, and Mathematics Education*. Dordrecht: Springer.

Recibido: *12-Junio-2016* | Aceptado: *11-Octubre-2016*

**PAOLO MANCOSU**, es Catedrático Willis S. and Marion Slusser de Filosofía en la University of California, Berkeley, Estados Unidos. Doctor en Filosofia (PhD) por la Stanford University, Estados Unidos. Sus intereres de investigación se centran en la filosofía de las matemáticas y su historia, la filosofía de la lógica y la lógica matemática. Entre sus principales publicaciones se cuentan: *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s* (Oxford: Oxford University Press, 1997); *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century* (Oxford: Oxford University Press, 1996); *The Philosophy of Mathematical Practice* (Oxford: Oxford University Press, 2008); y, *The Adventure of Reason* (Oxford: Oxford University Press, 2010). En breve aparecerá: *Abstraction and Infinity*, en Oxford University Press.

**DIRECCIÓN POSTAL:** Department of Philosophy. 314 Moses Hall #2390, University of California, Berkeley, CA 94720-2390, United States of America. e-mail (✉): mancosu@socrates.berkeley.edu

**CÓMO CITAR ESTE TRABAJO:** MANCOSU, Paolo. «Algunas observaciones sobre la filosofía de la práctica matemática». *Disputatio. Philosophical Research Bulletin* 5:6 (2016): pp. 131-156.