Wittgenstein's Diagonal Argument: A Variation on Cantor and Turing

JULIET FLOYD

With a Translation into Spanish by Kurt Wischin

Introductory remarks for the version in Spanish:

BRANDOM'S "ASSERTING" INAUGURATED his wide–ranging program of *analytic pragmatism*, a view designed to reconstruct the analytic tradition as a whole and further it in systematic fashion. Revisiting Frege, father of the tradition, Brandom shows the importance to Frege's conception of logic of the normative, practically engaged notions of *inferring*, *asserting*, *licensing* and *claiming*. By drawing these notions in, he was poised to systematically synthesize two paradigms of method in the analytic tradition by rejecting the then–fashionable view that it faces an exclusive choice between systematic semantic theorizing (with its privileging of logical vocabulary and formal articulation) and particularist pragmatist therapy.

Brandom is indebted to Rorty's account of the analytic tradition as one largely and unfortunately entangled with the Cartesian idea that language's essence is to *represent* reality: that words *refer* to reality, and statements represent, truly or falsely, facts about the world. Only pragmatism can overcome this.

The present paper, very much in the spirit of overcoming this bifurcation, challenges received readings both of Wittgenstein and of Turing. Turing was no Cartesian representationalist primarily theorizing the mind, but rather a philosopher welcoming Wittgensteinean ideas into his logical practice. By reconstructing the heart of Turing's resolution of the *Entscheidungsproblem*, we see Turing himself draw in pragmatic commitment and action at the foundation of logic. Moreover, Wittgenstein responded to Turing's sense of the diagonal process by incorporating the argument into his own views about rule–following and games.

J. Floyd (✉)
Boston University, Boston, USA
e-mail: jfloyd@bu.edu

Disputatio. Philosophical Research Bulletin
Vol. 8, No. 9, Jun. 2019, pp. 593-644
ISSN: 2254-0601 | [EN/SP] | **ARTICLE**

§1. Introduction

On 30 July 1947 Wittgenstein began writing what I call in what follows his "1947[1]: remark":

> Turing's "machines". These machines are *humans* who calculate. And one might express what he says also in the form of *games*. And the interesting games would be such as brought one via certain rules to nonsensical instructions. I am thinking of games like the "racing game"[2]. One has received the order "Go on in the same way" when this makes no sense, say because one has got into a circle. For that order makes sense only in certain positions (Watson)[3].

The most sustained interpretation of this remark was offered some time ago by Stewart Shanker, who argued (1987, 1998) that its primary focus is philosophy of mind, and specifically the behaviorism embedded within the cognitivist revolution that Turing spawned. Shanker maintains that Wittgenstein is committed to denying Church's thesis, viz., that all (humanly) computable functions are Turing computable. In what follows I shall leave aside Church's thesis: too many issues about it arise for me to profitably canvas the associated problems here, and Shanker is quite clear that he is reconstructing the implications of Wittgenstein's remark and not its specific, local, content. Nor shall I contest the idea —forwarded not only by Shanker, but also by Kripke and Wright (among many others) —that there are fundamental criticisms of functionalism, reductionism, and computationalism about the mind that may be drawn out of Wittgenstein's later thought[4]. Shanker is surely right to have stressed the broad context of Wittgenstein's 1947 remark, which is a lengthy exploration of psychological concepts. And Wittgenstein did investigate the sense in which any model of computation such as Turing's could be said to give us a description of how humans (or human brains or all possible computing machines) actually work, when

1 This part of the remark is printed as §1096 of Wittgenstein et al. (1980), hereafter abbreviated RPP I. See footnote 21 below for the manuscript contexts.

2 I have not been able to identify with certainty what this game is. I presume that Wittgenstein is thinking of a board game in which cards are drawn, or knobs turned so as to move pieces in a simulated horse race. See below for specifics.

3 Alister Watson discussed the Cantor diagonal argument with Turing in 1935 and introduced Wittgenstein to Turing. The three had a discussion of incompleteness results in the summer of 1937 that led to Watson (1938). See Hodges (1983), pp. 109, 136 and footnote 6 below.

4 Kripke (1982), Wright (2001), Chapter 7. See also Gefwert (1998).

calculating. Turing offers, not a definition of "state of mind", but what Wittgenstein thought of as a "language game", a simplified model or snapshot of a portion of human activity in language, an object of comparison forwarded for a specific analytic purpose.

Turing sent Wittgenstein an offprint of his famous (1937a) paper "On Computable Numbers, With an Application to the *Entscheidungsproblem*"[5]. It contains terminology of "processes", "motions" "findings" "verdicts", and so on. This talk had the potential for conflating an analysis of Hilbert's *Entscheidungsproblem* and the purely logical notion of possibility encoded in a formal system with a description of human computation. As Shanker argues, such conflations without due attention to the idealizations involved were of concern to Wittgenstein. However, as I am confident Shanker would allow, there are other issues at stake in Wittgenstein's remark than philosophy of mind or Church's thesis. Turing could not have given a negative resolution of the *Entscheidungsproblem* in his paper if his proof had turned on a specific thesis in philosophy of mind. Thus it is of importance to stress that in his 1947 remark Wittgenstein was directing his attention, not only to psychological concepts, but to problems in the foundations of logic and mathematics, and to one problem in particular that had long occupied him, viz., the *Entscheidungsproblem.*

In the above quoted 1947 remark Wittgenstein is indeed alluding to Turing's famous (1937a) paper. He discussed its contents and then recent undecidability results with (Alister) Watson in the summer of 1937, when Turing returned to Cambridge between years at Princeton[6]. Since Wittgenstein had given an early formulation of the problem of a decision procedure for all of logic[7], it is likely that Turing's (negative) resolution of the *Entscheidungsproblem* was of special interest to him. These discussions preceded and, I believe, significantly stimulated and shaped Wittgenstein's focused work on the foundations of mathematics in the period 1940–1944, especially his preoccupation with the idea that mathematics might be conceived to be wholly *experimental* in nature: an idea he associated with Turing. Moreover, so far as we know Wittgenstein never read Turing's "Computing Machinery and Intelligence" Turing (1950), the paper that injected the AI program, and Church's

5 See Hodges (1983), p. 136. Cf. Turing (1937c).

6 Hodges (1983), p. 135; cf. Floyd (2001).

7 In a letter to Russell of later November or early December 1913; see R. 23 in McGuinness (2008) or in Wittgenstein (2004). For a discussion of the history and the philosophical issues see Dreben and Floyd (1991).

thesis, into philosophy of mind[8]. Instead, in 1947 Wittgenstein was recalling discussions he had had with Watson and Turing in 1937–1939 concerning problems in the foundations of mathematics.

In general, therefore, I agree with Sieg's interpretation of Turing's model in relation to Wittgenstein's 1947 remark. Sieg cites it while arguing, both that Turing was not the naive mechanist he is often taken to be, and also that Wittgenstein picked up on a feature of Turing's analysis that was indeed crucial for resolving the *Entscheidungsproblem*[9]. What was wanted to resolve Hilbert's famous problem was an analysis of the notion of a "definite method" in the relevant sense: a "mechanical procedure" that can be carried out by human beings, i.e., computers, with only limited cognitive steps (recognizing a symbolic configuration, seeing that one of finitely many rules applies, shifting attention stepwise to a new symbolic configuration, and so on)[10]. An analysis like Turing's that could connect the notion with (certain limited aspects of possible) *human* cognitive activity was, then, precisely what was wanted. The human aspect enters at one pivotal point, when Turing claims that a human computer can recognize only a bounded number of different discrete configurations "at a glance", or "immediately"[11]. Sieg's conceptual analysis explains what makes Turing's analysis of computability more vivid, more pertinent and (to use Gödel's word) more epistemologically satisfying than Church's or Gödel's extensionally equivalent demarcations of the class of recursive functions, though without subscribing to Gödel's and Church's own accounts of that epistemic advantage[12].

It is often held (e.g., by Gödel)[13] that Turing's analogy with a human computer,

8 Malcolm queried by letter (3 November 1950, now lost) whether Wittgenstein had read "Computing Machinery and Intelligence", asking whether the whole thing was a "leg pull". Wittgenstein answered (1 December 1950) that "I haven't read it but I imagine it's no leg–pull". (Wittgenstein (2004), McGuinness (2008), p. 469).

9 Sieg (1994), p. 91; Sieg (2008), p. 529.

10 The *Entscheidungsproblem* asks, e.g., for an algorithm that will take as input a description of a formal language and a mathematical statement in the language and determine whether or not the statement is provable in the system (or: whether or not a first–order formula of the predicate calculus is or is not valid) in a finite number of steps. Turing 1937a offered a proof that there is no such algorithm, as had, albeit with a different proof, the earlier Church (1936).

11 As Turing writes (1937a, p. 231), "the justification lies in the fact that the human memory is necessarily limited"; cf. §9 of the paper.

12 See Sieg (2006a, b). Compare Gandy (1988). On Gödel's attitude, see footnote 26 below.

13 See the note Gödel added to his "Some remarks on the undecidability results" (1972a), in Gödel (1990),

drawing on the assumption that a (human) computer scans and works with only a finite number of symbols and/or states, involves strong metaphysical, epistemological and/or psychological assumptions that he intended to use to *justify* his analysis. From the perspective adopted here, this is not so. Turing's model only makes explicit certain characteristic features earmarking the concept that is being analyzed in the specific, Hilbertian context (that of a recognizable *step within* a computation or a formal system, a "definite procedure" in the relevant sense). It is not a thesis in philosophy of mind or mathematics, but instead an assumption taken up in a spirit analogous to Wittgenstein's idea that a proof must be perspicuous (*Übersichtlich; Übersehbar*), i.e., something that a human being can take in, reproduce, write down, communicate, verify, and/or articulate *in some systematic way or other*[14].

If we look carefully at the context of Wittgenstein's 1947 remark, we see that it is Turing's *argumentation* as such that he is considering, Turing's *use* of an abstract model of human activity to make a diagonal argument, and not any issue concerning the explanation or psychological description of human mental activity as such. This may be seen, not only by emphasizing, as Sieg does, that Turing's analysis requires no such general description, but also by noticing that immediately after this 1947 remark Wittgenstein frames a novel "variant" of Cantor's diagonal argument.

The purpose of this essay is to set forth what I shall hereafter call *Wittgenstein's Diagonal Argument.* Showing that it *is* a distinctive argument, that it is a *variant* of Cantor's and Turing's arguments, and that it *can* be used to make a proof are my primary aims here. Full analysis of the 1947 remarks' significance within the context of Wittgenstein's philosophy awaits another occasion, though in the final section I shall broach several interpretive issues.

In presenting Wittgenstein's Diagonal Argument I proceed as follows. First (Sect. 2.1), I briefly rehearse the Halting Problem, informed by a well–known application of diagonal argumentation. While that argument itself does not, strictly speaking, appear in Turing's (1937a) paper, a closely related one does, at the beginning of its §8 (Sect. 2.2). However, Turing frames another, rather different argument immediately afterward, an argument that appeals to the notion of computation by machine in a

p. 304, and Webb (1990). Gödel (somewhat unfairly) accuses Turing of a "philosophical error" in failing to admit that *"mind, in its use, is not static, but constantly developing"*, as if the appropriateness of Turing's analysis turns on denying that mental states might form a continuous series.

14 Wittgenstein's notion of *perspicuousness* has received much attention. Two works which argue, as I would, that it does not involve a restrictive epistemological thesis or reductive anthropologism are Marion (2011) and Mühlhölzer (2010).

more concrete way, through the construction of what I shall call a *Pointerless Machine* (Sect. 2.3). Next (3) I present Wittgenstein's Diagonal Argument, arguing that it derives from his reading of Turing's §8. And then (4) I present a "positive" version of Russell's paradox that is analogous to Wittgenstein's and Turing's arguments and which raises interesting questions of its own. Finally (5), I shall canvas a few of the philosophical and historical issues raised by these proofs.

§ 2. Three Diagonal Arguments

§ 2.1. The Halting Problem

Though it does not, strictly speaking, occur in Turing (1937a), the so–called "Halting Problem" is an accessible and well–known example of diagonal argumentation with which we shall begin[15].

The totality of Turing machines in one variable can be enumerated. In his (1937a) Turing presented his machine model in terms of "skeleton tables" and associated with each particular machine a unique "description number" **(D.N.),** thus Gödelizing; nowadays it is usual to construe a Turing machine as a set of quadruples. In the modern construal, a Turing machine t has as its input–output behavior a partial function $f: N \to N$ as follows: t is presented with an initial configuration that codes a natural number j according to a specified protocol, and t then proceeds through its instructions. In the event that t goes into a specified halt state with a configuration that codes a natural number k according to protocol, then $f(j) = k$ and f is said to *converge at j,* written "$f(j)\downarrow$". Otherwise, f is said to *diverge at j,* written "f (j) $\uparrow$". In general, f is partial because of the latter possibility.

Enumerating Turing machines as t_i, we have corresponding partial functions $f_i : N \to N$, and a partial function $g : N \to N$ is said to be *computable* if it is an f_i. The set of Turing machines is thus definable and enumerable, but represents the set of *partial* computable functions. Because of this, it is not possible to diagonalize out of the list of computable functions, as it is from a list of, e.g., real numbers in binary representation (as in Cantor's 1891 argument). In other words, the altered diagonal sequence, though it may be defined as a function, is not a computable function in the Turing sense.

The last idea is what is to be proved. (Once the equivalence to formal systems is

15 Turing's argument in 1937a in §8 is not formulated as a halting problem; this was done later, probably by Martin Davis in a lecture of 1952. For further details on historical priority, see *http:// en. wikipedia.org/wiki/Halting_problem#History_of_the_halting_problem* and Copeland (2004), p. 40 n 61.

made explicit, this result yields Turing's negative resolution of the *Entscheidungsproblem.)*

To fix ideas, consider a binary array, conceived as indicating *via* "$\uparrow$" that Turing machine *t,* diverges on input *j,* and *via* "f' that it converges on input *j.* Each t_i computes a partial function $f_i : N \to N$ on the natural numbers, construed as a binary sequence.

t_1	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	...
t_2	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	...
t_3	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	...
t_4	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	...
t_5	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	...
...						

Cantor's method of diagonal argument applies as follows. As Turing showed in §6 of his (1937a), there is a universal Turing machine UT_1. It corresponds to a partial function *f (i, j)* of two variables, yielding the output for t_i on input *j,* thereby simulating the input–output behavior of every t_i on the list. Now we construct D, the Diagonal Machine, with corresponding one–variable function which on input *i* computes UT 1 *(i, i).* D is well–defined, and corresponds to a well–defined (computable, partial) function.

We suppose now that we can define a "Contrary" Turing machine C that reverses the input–output behavior of **D** as follows: C, with the initial configuration coding *j,* first proceeds through the computation of D(j) and then follows this rule:

(*) If **D** *(j)*$\downarrow$, then C *(j)* = $\uparrow$;
If **D** *(j)*$\uparrow$, then C *(j)* = 1

In other words, if D(*j*) converges then proceed to instructions that never halt, and if D(*j*) diverges, then output the code for 1 and enter the halting state.

But there is a contradiction with assuming that this rule can be followed, or implemented by a machine that is somewhere on the list of Turing machines. Why? If C were a Turing machine, it would be t_k for some *k.* Then consider t_k on input *k.* By rule t"), *if* t_k converges on *k.,* then it diverges on *k;* but if it diverges on *k,* then it converges on *k.* So t_k converges on *k* if and only if it diverges on *k.* This contradiction indicates that our supposition was false.

Rule (*) assumes Halting Knowledge, i.e., that machine C can reach a conclusion about the behavior of D on any input *j,* and follow rule (*). But to have such knowledge requires going through all the (possibly) infinitely many steps of the D machine. And that is not itself a procedure that we can express by a rule for a one–variable Turing machine. In other words Halting Knowledge is not Turing computable. Classical philosophical issues about negation in infinite contexts —the worry about what it means to treat a completed totality of steps as just another step— emerge. Turing himself acknowledged as much. In (1937b) he published some corrections to his (1937a) paper. The first fixed a flaw in a definition pointed out by Bernays, thereby narrowing a reduction class he had framed for the Decision Problem. The second, also stimulated by Bernays, made his analysis more general, showing that his definition of "computable number" serves independently of a choice of logic. Turing wrote to Bernays (22 May 1937) that when he wrote the original paper of (1937a), "I was treating 'computable' too much as one might treat 'algebraic', with wholesale use of the principle of excluded middle. Even if this sounds harmless, it would be as well to have it otherwise" (1937d). In his (1937b) correction he modified the means by which computable numbers are associated with computable sequences, citing Brouwer's notion of an overlapping choice sequence, as Bernays suggested he do[16]. This avoids what Turing calls a "disagreeable situation" arising in his initial arguments: although the law of the excluded middle may be invoked to show that a Turing machine *exists* that will compute a function (e.g., the Euler constant), we may not have the means to *describe* any such machine (Turing 1937b, p. 546). The price of Turing's generalization is that real numbers no longer receive unique representations by means of sequences of figures. The payoff is that his definition's applicability no longer depends upon invoking the law of the excluded middle in infinite contexts. The loss, he explains, "is of little theoretical importance, since the [description numbers of Turing machines] are not unique in any case" and the "totality of computable numbers [remains]

16 Cf. Bernays to Turing 24 September 1937 (Turing 1937d). The corrections using Brouwer's notion of an overlapping sequence are explained in Petzold (2008), pp. 310ff. Petzold conjectures that conversations with Church at Princeton (or with Weyl) may have stimulated Turing's interest in recasting his proof, though he suspects that "Turing's work and his conclusions are so unusual that ... he wasn't working within *anyone's* prescribed philosophical view of mathematics" (2008, p. 308). I agree. But in terms of possible influences on Turing, Bernays should be mentioned, and Wittgenstein should be added to the mix. The idea of expressing a rule as a table–cum–calculating device read off by a human being was prevalent in Wittgenstein's philosophy from the beginning, forming part of the distinctive flavor in explicitly in his Wittgenstein (1980).

unaltered” (Turing 1937b, p. 546). In other words, his characterization of the computable numbers is robust with respect to its representation by this or that formal system, this or that choice of logic, or any specific analysis of what a real number really *is.* Today we would say that the class of computable numbers is *absolute* with respect to its representation in this or that formal system[17]. And this too is connected with the anthropomorphic quality of his model. For it is not part of the ordinary activity of a human computer, or the general concept of a person working *within* a formal system of the kind involved, to take a stance on the law of the excluded middle.

§ 2.2. Turing’s First Argument

Turing's (1937a) definitions are as follows. A ***circle–free machine*** is one that, placed in a particular initial configuration, prints an infinite sequence of 0's and 1's (blank spaces and other symbols are regarded by Turing as aids to memory, analogous to scratch paper; only these scratch symbols are ever erased). A ***circular machine*** fails to do this, never writing down more than a finite number of 0s and 1s. (Unlike a contemporary Turing Machine, then, for Turing the *satisfactory* machines print out infinite sequences of 0's and 1's, whereas the *unsatisfactory* ones “get stuck” (see footnote 26).) A ***computable number*** is a real number differing by an integer from a number computed by a circle–free machine (i.e., its decimal (binary) expansion will, in the non–integer part, coincide with an infinite series of 0's and 1's printed by some circle–free machine); this is a real number whose decimal (binary) expression is said to be ***calculable by finite means.*** A ***computable sequence*** is one that can be represented (computed) by a circle–free machine.

The First Argument begins §8. Turing draws a distinction between the application of Cantor's original diagonal argument and the version of it he will apply in his paper:

17 Gödel, concerned with his own notion of general recursiveness when formulating the absoluteness property (in 1936) later noted the importance of this notion in connection with the independence of Turing's analysis from any particular choice of formalism. He remarked that with Turing's analysis of computability "one has for the first time succeeded in giving an absolute definition of an interesting epistemological notion, i.e., one not depending on the formalism chosen" (Godel here means a formal system of the relevant (recursively axiomatizeable, finitary language) kind). See Godel's 1946 "Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems in mathematics", in Godel (1990), pp. 150–153; Compare his Postscriptum to his 1936a essay "On the Length of Proofs", Ibid., p. 399. See footnote 26, and Sieg (2006a, b), especially pp. 472ff.

> It may be thought that arguments which prove that the real numbers are not enumerable would also prove that the computable numbers and sequences cannot be enumerable. [n. Cf. Hobson, *Theory of functions of a real variable (2nd* ed., 1921), 87, 88]. It might, for instance, be thought that the limit of a sequence of computable numbers must be computable. This is clearly only true if the sequence of computable numbers is defined by some rule.
>
> Or we might apply the diagonal process. "If the computable sequences are enumerable, let α_n be the n–th computable sequence, and let $\Phi_n(m)$ be the m–th figure in α_n. Let β be the sequence with $1-\Phi_n(n)$ as its n–th figure. Since β is computable, there exists a number K such that $1-\Phi_n(n) = \Phi_K(n)$ all n. Putting $n = K$, we have $1 = 2\Phi_K(K)$, *i.e.* 1 is even. This is impossible. The computable sequences are therefore not enumerable".

The argument Turing offers in quotation marks purports to show that the computable numbers are not enumerable in just the same way as the real numbers are not, according to Cantor's original diagonal argument. (We should notice that its structure is reminiscent of the Contrary Machine, framed in the Halting Problem above, which switches one kind of binary digit to another, "negating" all the steps along the diagonal.) However, Turing responds:

> The fallacy in this argument lies in the assumption that β is computable. It would be true if we could enumerate the computable sequences by finite means [JF: i.e., by means of a circle–free machine], but the problem of enumerating computable sequences is equivalent to the problem of finding out whether a given number is the D.N of a circle–free machine, and we have no general process for doing this in a finite number of steps. In fact, by applying the diagonal process argument correctly, we can show that there cannot be any such general process.

This "correct" application of the diagonal argument is, globally, a *semantic* one in the computer scientist's sense: it deals with sequences (e.g. β) and the nature of their possible characterizations. The "fallacy" in thinking that Cantor's diagonal argument *can* apply to show that the computable numbers are not enumerable (i.e., in the original, Cantorian sense of enumerable as "countable") is that we will, as it turns out, be able to reject the claim that the sequence β is computable. So there is no diagonalizing out. The assumption that α_n, the enumeration of computable sequences, is enumerable *by finite means* is false. Turing's First Argument rejects that claim (much as in the Halting Argument above) by producing the contradiction he describes: it follows from treating the problem of enumerating all the computable sequences by finite means (i.e., by a circle–free machine) as "equivalent" to the problem of finding a general process for determining whether a given arbitrary number is or is not the description number of a circle–free machine. This, Turing writes –initially without argument—we cannot carry out in every case in a finite number of steps. However, Turing immediately writes that this First Argument, "though perfectly sound", has a "disadvantage", namely, it may nevertheless "leave the reader with a feeling that 'there must be something wrong'". Turing has remained so far little more than intuitive about our inability to construct a circle–free machine that will determine whether or not a number is the description number of a circle–free machine, and he has not actually shown how to reduce the original problem to that one. At best he has leaned on the idea that an infinite tape cannot be gone through in a finite number of steps. While this is fine so far as it goes, Turing asks for something else, something more rigorous.

§ 2.3. The Argument from the Pointerless machine

Turing immediately offers a second argument, one which, as he says, "gives a certain insight into the significance of the idea "circle–free?". I shall call it the *Argument from the Pointerless Machine* to indicate a connection with Wittgenstein's idea of logic as comprised, at least in part, of tautologies, i.e., apparently sensical sentences which are, upon further reflection, *sinnlos,* directionless, like two vectors which when added yield nothing but a directionless point with "zero" directional information[18]. Since Turing's is the first in print ever to *construct* a machine model to argue over computability in principle, it is of great historic importance, and so worth rehearsing in its own right. More importantly for my purposes here, *it* is the argument that Wittgenstein's 1947 diagonal argument phrased in terms of games. Turing's second argument is intended to isolate more perspicuously the difficulty indicated in his First Argument. It works by considering how to define a machine $\mathcal{H}$, using an enumeration of all Turing machines, to directly compute a certain sequence, β', whose digits are drawn from the $\Phi_n(n)$ along the diagonal sequence issuing from the enumeration of all computable sequences α_n. Recall from 1.2 above that αn is the *n*th computable sequence in the enumeration of computable sequences (i.e., those sequences computable by a circle–free machine); $\Phi_n(m)$ is the *m*th figure in $\alpha_n\beta$, used in the First Argument, is the "contrary" sequence consisting of a series of 0's and 1's issuing from a switch of 0 to 1 and vice versa along the diagonal sequence, $\Phi_n (n)$. By contrast β' is the sequence whose *n*th figure is the output of the *n*th circle–free machine on input *n*: it corresponds to $\alpha_n(n)$, which we may think of as the *positive* diagonal sequence. Its construction will make clear how it is the way in which one conceives of the

18 Compare the discussion in Dreben and Floyd (1991).

enumeration of α_n (by finite means or not by finite means) that matters.

The Turing machines may be enumerated, for each has a "standard" description number *k.* Now suppose that there is a definite process for deciding whether an arbitrary number is that of a circle–free machine, i.e., that there is a machine $\mathcal{D}$ which, given the standard description number *k* of an arbitrary Turing machine $\mathcal{M}$, will test to see whether *k* is the number of a circular machine or not. If $\mathcal{M}$ is circular, $\mathcal{D}$ outputs on input *k "u"* (for "unsatisfactory"), and if *M* is circle–free, $\mathcal{D}$ outputs on *k* "s" (for "satisfactory"). $\mathcal{D}$ enumerates α_n by finite means. Combining $\mathcal{D}$ with the universal machine *U,* we may construct a machine $\mathcal{H}$. *1i* is designed to compute the sequence *W.* But it turns out to be (what I call) a *Pointerless Machine,* as we may see from its characterization.

$\mathcal{H}$ proceeds as follows to compute β'. Its motion is divided into sections. In the first *N* –1 sections the integers 1, 2, ... *N* –1 have been tested by $\mathcal{D}$. A certain number of these, say *R(N–1),* have been marked "s", i.e., are description numbers of circle–free machines. In the *Nth* section the machine $\mathcal{D}$ tests the number *N.* If *N* is satisfactory, then *R(N)* = 1 + *R(N–1)* and the first *R(N)* figures of the sequence whose description number is *N* are calculated. $\mathcal{H}$ writes down the *R(N)th* figure of this sequence. This figure will be a figure of β'*,* for it is the output on *n* of the *n*th circle–free Turing machine in the enumeration of α_n by finite means that is assumed to provide. Otherwise, if *N* is not satisfactory, then *R(N) = R(N–1)* and the machine goes on to the *(N* + l)th section of its motion.

$\mathcal{H}$ is circle–free, by the assumption that $\mathcal{D}$ exists. Now let *K* be the D.N. of $\mathcal{H}$. What does $\mathcal{H}$ do on input *K?* Since *K* is the description number of $\mathcal{H}$, and $\mathcal{H}$ is circle–free, the verdict delivered by $\mathcal{D}$ cannot be *"u"*. But the verdict also cannot be "s". For if it were, $\mathcal{H}$ would write down as the *Kth* digit of β' the *Kth* digit of the sequence computed by the *Kth* circle–free machine in α_n, namely by $\mathcal{H}$ itself. But the instruction for $\mathcal{H}$ on input *K* would be "calculate the first R(K**)** = *R(K* –1) + 1 figures computed by the machine with description number *K* (that is, $\mathcal{H}$*)* and write down the *R(K)*th*".* The computation of the first *R(K)* —1 figures would be carried out without trouble. But the instructions for calculating the *R(K)*th figure would amount to "calculate the first *R(K)* figures computed by $\mathcal{H}$ and write down the *R(K)*th*".* This digit "would never be found", as Turing says. For at the *K*th step, it would be "circular", contrary to the verdict "s" and the original assumption that $\mathcal{D}$ exists ((1937a), p. 247). For its instructions at the *K*th step amount to the "circular" order "do what you do".

The First Argument and Turing's Argument from the Pointerless Machine are constructive arguments in the classical sense: neither invokes the law of the excluded middle to reason about infinite objects. Moreover, as Turing's (1937b) correction showed, each may be set forth without presuming that standard machine descriptions are associated uniquely with real numbers, i.e., without presupposing the application of the law of excluded middle here either. Finally, both are, like the Halting argument, computability arguments: applications of the diagonal process in the context of Turing Machines.

But the Argument from the Pointerless Machine is more concrete than either the First Argument or the Halting Argument. And it is distinctive in not asking us to build the application of negation *into* the machine. The Pointerless Machine is one we construct, and then watch and trace out. The difficulty it points to is not that $\mathcal{H}$ gives rise to the possibility of constructing another contrary sequence which generates a contradiction. Instead, the argument is semantic in another way. The Pointerless Machine $\mathcal{H}$ gives rise to a command structure which is empty, tautologous, senseless. It produces, not a contradiction, but an empty circle, something like the order "Do what you are told to do". In the context at hand, this means that $\mathcal{H}$ cannot *do* anything. As Wittgenstein wrote in 1947, a command line "makes sense only in a certain positions".

3. Wittgenstein's Diagonal Argument

Immediately after his 1947 about Turing's "Machines" being "humans who calculate", Wittgenstein frames a diagonal argument of his own. This "expresses" Turing's argument "in the form of games", and should be counted as a part of that first remark.

> A variant of Cantor's diagonal proof:
>
> Let N=F (k, n) be the form of the law for the development of decimal fractions. N is the nth decimal place of the kth development. The diagonal law then is: N=F (n,n) = Def F' (n).
>
> To prove that F'(n) cannot be one of the rules F (k, n).
>
> Assume it is the 100th. Then the formation rule of F' **(1)** runs F **(1, 1),** of F'(2) F (2, 2) etc.
>
> But the rule for the formation of the 100th place of F'(n) will run F (100, 100); that is, it tells us only that the hundredth place is supposed to be equal to itself, and so for n = 100 it is *not* a rule. [I have namely always had the feeling that the Cantor proof did two things, while appearing to do only one.] The rule of the game runs "Do the same as ... " —and in the special case it becomes "Do the same as you are doing"[19].

[19] Wittgenstein (1999), MS 135 p. 118; the square brackets indicate a passage later deleted when the remark made its way into Wittgenstein (1999), TS 229 §1764, published at RPP I §1097. (At *Zettel* §694

As we see, it is the Argument from the Pointerless Machine which Wittgenstein is translating into the vocabulary of language games in 1947. The reference to Turing and Watson is not extraneous. Moreover, the argument had a legacy. Wittgenstein was later credited by Kreisel with “a very neat way of putting the point” of Gödel 's use of the diagonal argument to prove the incompleteness of arithmetic, in terms of the empty command, "Write what you write" (1950, p. 28ln)[20]. Let us rehearse Wittgenstein's argument, to show that it constitutes a genuine proof. Wittgenstein begins by imagining a “form” of law for enumerating the “decimal fractions” (*Dezimalbrüchen*). We may presume that Wittgenstein has the rational numbers in mind, and in the case of the rational numbers, we know that such a law or rule (e.g., a listing) can exhaustively enumerate the totality. As Cantor showed, this is not true for the totality of real numbers. But the argumentation Wittgenstein sets forth applies whether the presentation of the list exhausts a set or not: all it assumes is that the presentation utilizes the expression of rules for the development of decimal fractions, a way of “developing” or writing them out that utilizes a countable mode of expression. Moreover, Wittgenstein's German speaks of decimal expansion development (*Entwicklung von Dezimalbrüchen*); and ordinarily in German this terminology (*Dezimalbruchentwicklung*) is taken to cover expansions of real numbers as well[21]. So Wittgenstein may well have had (a subset of) the real numbers, e.g., the computable real numbers, in mind as well. “Form” here assumes a space of *possible* representations: it means that we may imagine an enumeration in any way we like, and Wittgenstein does not restrict its presentation. He is articulating, in other words, a generalized *form* of diagonal argumentation. The argument is thus generally applicable, not only to decimal expansions, but to any purported listing or rule–governed expression of them; it does not rely on any particular notational device or preferred spatial arrangements of signs. In that sense, Wittgenstein's argument appeals to no picture, and it is not essentially diagrammatical or representational, though it may be diagrammed (and of course, insofar as it is a *logical* argument, its

only this second remark concerning the proof is published, thereby separating it from the mention of Turing and Watson (Wittgenstein (1970), hereafter Z). The argument as written here occurs here with "F' replacing the original "<//', following the typescript.

20 See also Stenius (1970) for another general approach to the antinomies distinguishing between contradictory rules (that cannot be followed) and contradictory concepts (e.g., "the round square") that is explicitly based on a reading of Wittgenstein (in this case, the *Tractatus*).

21 On the German see http://de.wikipedia.org/wiki/Dezimalbruch and http://de.wikipedia.org/wiki/Dezimalsystem#Dezimalbruchentwicklung.

logic may be represented formally)[22]. Like Turing's arguments, it is free of a direct tie to any particular formalism. Unlike Turing's arguments, it explicitly invokes the notion of a language–game and applies to (and presupposes) an everyday conception of the notions of *rules* and the *humans who follow them*[23]. Every line in the diagonal presentation above is conceived as an instruction or command, analogous to an order given to a human being.

To fix ideas, let us imagine an enumeration of decimal fractions in the unit interval in binary decimal form. Now let N = *F(n, n)* = Def F' *(n),* whose graph is given by the diagonal line in the picture below.

	1	2	3	4	5	...
r_1	0	0	1	1	0	...
r_2	1	1	0	0	1	...
r_3	1	1	1	0	0	...
r_4	0	0	0	0	1	...
r_5	1	0	1	0	1	...
...						

The rule for computing F' *(n)* is clear: go down the diagonal of this list, picking off the value of r_n on input *n.* This rule appears to be perfectly comprehensible and is in *that* sense well defined. But it is not determined, in the sense that at each and every step we know what to do with it. Why? Wittgenstein's "variant" of Cantor's Diagonal argument —that is, of Turing's Argument from the Pointerless Machine— is this.

Assume that the function F' is a development of one decimal fraction on the list,

22 Recall that in his earlier 1938 remarks on the Cantor diagonal argument Wittgenstein was preoccupied with the idea that the proof might be thought to depend upon interpreting a particular kind of picture or diagram in a certain way. Wittgenstein (1978) Part II. There are many problematic parts of these remarks, and I hope to discuss them in another essay. For now I remark only that they are much earlier than the 1947 remarks I am discussing here, written down in the immediate wake of his summer 1937 discussions with Watson and Turing.

23 Though Turing himself would write that "these [limitative] results, and some other results of mathematical logic, may be regarded as going some way towards a demonstration, within mathematics itself, of the inadequacy of 'reason' unsupported by common sense". Turing (1954), p. 23.

say, the 100th. The "rule for the formation" here, as Wittgenstein writes, "will run F(l00, 100)." But this

> ... tells us only that the hundredth place is supposed to be equal to itself, and so for n = 100 it is not a rule. The rule of the game runs "Do the same as ... " —and in the special case it becomes "Do the same as you are doing". (RPP I §1097, quoted above).

We have here an order that, like Turing's $\mathcal{H}$ machine, "has got into a circle" (cf. RPP I § 1096, quoted above)[24]. If one imagines drawing a card in a board game that says "Do what this card tells you to do", or "Do what you are doing", I think we have a fair everyday representation of the kind of phenomenon upon which Wittgenstein draws. Wittgenstein's form of circle is, unlike Turing's, explicitly expressed in terms of a tautology. And Turing's argument is distinctive, upon reflection, precisely in producing a tautology of a certain sort. In a sense, Wittgenstein is *literalizing* Turing's model, bringing it back down to the everyday, and drawing out the anthropomorphic, command–aspect of Turing's metaphors. I have said that Wittgenstein presents a genuine proof in his 1947 remark, and I have been willing to regard it as a "variant" of Cantor's diagonal argumentation. But a qualification is in order. The argument cannot survive construal in terms of a purely extensional way of thinking, and that way of thinking is required for the context in which Cantor's argument is forwarded, a context in which infinite objects are reasoned about and with. What is shown in Wittgenstein's argument is that on the assumption, F'(100) cannot be computed. But not because of the task being infinite. Instead, we are given a rule, that, as Wittgenstein writes, "is *not* a rule" in the same sense. There is, extensionally speaking, something which *is* the value of F(l00, 100) in itself, and it is either O or 1. But if we ask *which* digit it is, we end up with the answer, "F(l00,100)", which doesn't

[24] Watson uses the metaphor that the machine "gets stuck" (Watson 1937, p. 445), but I have not found that metaphor either in Wittgenstein or Turing: it is rather ambiguous, and does not distinguish Turing's First Argument from that of the Pointerless Machine. Both Watson and Turing attended Wittgenstein's 1939 lectures at Cambridge; see (Wittgenstein 1989) where the metaphor of a contradiction "jamming" or "getting stuck" is criticized. I assume this is in response to a worry about the way of expressing things found in Watson 1937. He worries that the machine metaphor may bring out a perspective on logic that is either too psychologistic, or too experimental. He emphasizes, characteristically, that instead what matters if we face a contradiction is that we do not recognize any action to be the fulfillment of a particular order, we say, e.g., that it "makes no sense". As he writes in the 1947 remarks considered here, "an order only makes sense in certain positions". Recall Z §689: "Why is a contradiction to be more feared than a tautology"?

say one way or the other what it is, because that will depend upon the assumption that this sequence is the value of F'(100) at 100. The diagonal rule, in other words, cannot be applied at this step. And we have no other means of referring to the *it* that is either O or 1 by means of any other rule or articulation on the list that we can *follow.*

One outcome of both Turing's and Wittgenstein's proofs is that the extensional point of view is not or exclusive as a perspective in the foundations of mathematics. Wittgenstein's version of the Argument from the Pointerless Machine shows that the particular rule, F'(*n*)*,* cannot be identified with any of the rules on the list, because it cannot be applied if we try to think of it as a particular member of the list. The argument shows a “crossing of pictures” or concepts which yields something new. If one likes, it proves that there is a number which is not a number given on the list, for it shows how to construct a rule for a sequence of 0s and 1s which cannot be a rule on the list like the others. The argument would apply, moreover, in any context in which the rule–articulable (“computable”) real numbers were asserted to be listed or enumerated in any way according to a rule —including, of course, any context in which, more controversially, one assumed that *only* rule–articulable real numbers *are* real numbers. But this particular assumption is not essential, either to Turing's or to Wittgenstein's arguments, which involve no such necessarily revisionary constructivist or finitistic implications or assumptions.

To recapitulate. Unlike the Halting Problem or the First Argument presented above, Wittgenstein's argument does not apply the law of the excluded middle, or any explicit contradiction or negation *by* the machine. It is not propositional, but in a sense purely conceptual or performative, turning on the idea of a coherently expressed command that turns out, upon reflection, to be empty, thereby generating a rule that we *see* cannot be applied in the same way as other rules are applied. There is of course no direct appeal to community–wide standards of agreement or any explicit stipulation used to draw the conclusion, so, it is not a purely “conventional” argument, though we see that the order could not be followed by anyone. Oddly, because it turns on a tautology, its conclusion is “positive”: it “constructs” a formulable rule that cannot be literally identified with any of the rule–commands on the list of rules supposed to be given. The diagonal then gives one a positive way of creating something new, i.e., a directive that cannot be sensibly followed. Before commenting further on this version of the proof, I want to underscore that as I have construed it there is no *rejection* of the results of Turing or Cantor involved in accepting Wittgenstein's Diagonal Argument. To make this clear, I shall briefly rehearse an analogous argument.

§ 4. The Positive Russell Paradox

Consider the binary array of O's and l's anew, but this time as a membership chart for an arbitrary set S.

$x_i \in x_j$?	1	2	3	4	...	
1	1	0	0	1	1	...
2	0	1	0	1	1	...
3	1	1	1	0	1	...
4	0	0	0	0	1	...
...						
						???

Let the array be a diagram of membership relations. At the point (i *,j)* if we see a "0", this indicates that x, $\notin$. x_j; if we see "1", it means $x_i \in x_j$.

Now let $S = \{x_i / x_j \in x_j\}$. This is the exact complement, so to speak, of the usual Russell set of all sets that are *not* members of themselves: I think of it as the *positive* Russell set. Whenever there is a "1" at a point (*i, j*) along the diagonal, this means that $x_i \in$ S. In a certain sense, S "comes before" Russell's set, for there is no use of negation in its definition.

Is S = x_j for some j? Well there is a difficulty here. For $x_j \in x_j$ iff $x_j \in$ S. But $x_j \in$ S iff $x_j \in x_j$—So we are caught in a circle of the form "it is what it is". This cannot be implemented.

An apparently unproblematic way of thinking is applied here, but two different ways of thinking about S are involved. They are at first blush buried, just as in Russell's usual form of the paradox, but they are there, and they are separable, viz., there is the thinking of S as an object or element that is a member of other sets, and the thinking of S as a concept, or defining condition.

We have here what might be regarded, following Turing and Wittgenstein, as a kind of performative or empty rule. You are told to do something depending upon what the rule tells you to do, but you cannot do anything, because you get into a loop or tautological circle. This set membership question cannot be a question on the list which you can apply, because you cannot apply the set's defining condition at every point. (An analogous line of reasoning may be applied to, e.g., "autological" in the Grelling paradox. Without negation, one does not get a contradiction, but one may generate a question that may be sensibly answered with a either Yes or No question, i.e., with a question that is unanswerable *in that sense.)*

Is the Positive Russell argument "constructive"? In a sense, Yes. It does not have to be seen to apply to actually infinite objects and name them directly, or invoke any axioms of set theory involving the infinite, though of course it might[25]. So, in this other sense, No. Its outcome is that there is an essential lack of uniformity marking the notion of a rule that can be applied. It involves no use of negation in the rule itself. So what is essentially constructive here is the implication: *If* you write the list as a totality, *then* you will be able to formulate a new rule. And *it* will yield a question one cannot answer without further ado, i.e., *that* rule will not be applicable in the same sense.

The Positive Russell argument refers to an extensional context, that of sets. But there is a creative, "positive" aspect of the argument that emerges, just as it does in Turing's and Wittgenstein's Pointerless Arguments. One must appreciate something or see something about what does *not* direct (any)one to do a particular thing, or assert the existence of a particular solution —rather than being forced to admit the existence of something. Cantor's diagonal argument is often presented as doing the latter, and not the former. But, as Turing and Wittgenstein's proofs make clear, Cantor's argumentation is actually furnishing the materials for more than one kind of argument. Such, I suggest, is Wittgenstein's point in writing in the above quoted remark of 1947 that Cantor did two different things. This is not to deny that Wittgenstein's argument is insufficient for Cantor's wider purposes, just as Turing's is, and for the same reason. These later "variants" of Cantor's argument are proofs with and about rules, not proofs utilizing or applying to actually infinite totalities. Nevertheless, we can distinguish Cantor's argumentation from his proof and from its applications, and regard what Turing and Wittgenstein do as "variants" of what Cantor did.

§ 5 Interpreting Wittgenstein

The "pointerless" proofs I have considered are down–to–earth in the way Wittgenstein and Turing liked: the "entanglement" in the idea of an exhaustive listing of rules is exhibited in the form of a recipe for a further rule, and the diagonal argument is conceived as a kind of process of conceptualization that generates a new kind of rule. The reasoning in both cases, is, moreover, presented in a way

25 S is empty by the axiom of foundation. Quine worked with *Urelemente* of the form x={x}, sets whose only members are themselves. (Quine (1937), Reprinted in Quine (1953, 1980)).

unentangled with any expression in a particular formalism. This does not mean that the arguments are unformalizeable, of course: certainly they apply, as Turing taught us, to formal systems of a certain kind. And a Turing Machine may well be conceived of as a formal system, its activities encodable in, e.g., a system of equations. But Turing's Machines, being framed in a way that is unentangled with a specific formal system, also offer an analysis of the very notion of a formal system itself. This allows them to make general sense of the range of application of the incompleteness theorems, just as Gödel noted[26].

Turing's and Wittgenstein's arguments from pointerless commands *evidently* do an end run around arguments over the application of the law of the excluded middle in infinite contexts, as other diagonal arguments do not. In this sense, they make logic (the question of a choice of logic) disappear. But I hope that my reconstruction of Wittgenstein's Diagonal Argument will go some distance toward in responding to the feeling some readers have had, namely, that Wittgenstein takes Cantor's proof to have no deductive content at all. It has been held that Wittgenstein took Cantor to provide only a picture or piece of applied mathematics warning against needless efforts to write down all the real numbers (Hodges, 1998). And it is true that Turing's and Wittgenstein's arguments require us to conceive of functions as presented through a collection of commands, rules, directives, in an *intensional* fashion. But they leave open in what sense this notion, or the notion of a rule, is meant (i.e., the digits of 0s and 1s are a mere *façon de parler* in the way I have presented the arguments here). A critique of the idea that the extensionalist attitude is the *only* legitimate attitude is implied, though, as I have argued, no refutation of extensionalism, Cantor's Diagonal Proof, or set theory follows.

Of course, Wittgenstein's remarks criticizing extensionalism as an exclusively correct point of view are well known. So are his suggestions to look upon mathematical statements as commands. However, though I shall not argue the point here, it seems to me that taking Wittgenstein's Diagonal Argument seriously, at its word, should call into question the idea that he is either dogmatic or skeptical about the notion of following a rule and the "intensional" point of view —unless one means that the notion of a rule and the following of a rule in general are something to be *uniformly* understood in terms of a special kind of fact or intuitive insight. Neither Wittgenstein nor Turing believed this. Wittgenstein's Diagonal Argument serves,

[26] In a note added in 1963 to a reprinting of his famous 1931 incompleteness paper, Gödel called Turing's analysis "a precise and unquestionably adequate definition of the general notion of formal system", allowing a "completely general version" of his theorems to be proved. See Gödel (1986), p. 195. On the subject of "formalism freeness" in relation to Gödel see Kennedy (unpublished). Compare footnote 17.

instead, to call into question forms of constructivism that take the notion of rule–following as clear or uniform. (I hope to discuss elsewhere the interpretations of Fogelin (1987), Kripke and Wright in light of the diagonal arguments I have discussed here.) His "everyday" version of the Argument from the Pointerless Machine, even more than Turing's, shows that there is a way of carrying out Cantor's argumentation that involves and applies to an "everyday" appeal to our sense of our ordinary activities when we compute or follow rules. In this sense, it makes the argumentation intelligible. One might want to say that it is more deeply or broadly anthropomorphic and intensional than Turing's. But that would be misleading. There is no scale involved here. Thus it seems to me that one of the most important things to learn from Wittgenstein's argument is that the very idea of a single "intensional" approach is not clear off the bat —any more than are the ideas that perception, understanding, and/or thought are intensional. Wittgenstein's "game" argumentation involves, not merely the notion of a rule, recipe, representation or feasible procedure, but some kind of understanding of *us,* that is, those who are reading through the proof: we must *see* that we can do nothing with the rule that is formulated. Not all rules are alike, and we have to sometimes *look and see* how to operate or use a rule before we see it aright. This last point is what Wittgenstein stressed just before the 1947 remarks I have discussed in this paper. He wrote,

> That we *calculate* with some concepts and with other do not, merely shows how different in kind conceptual tools are (how little reason we have ever to assume uniformity here). (RPP I §1095; cf. Z §347)

One of the most important themes in Wittgenstein's later philosophy starts from just this point. The difficulty in the grammar of the verb "to see" (or: "to follow a rule") is not so much disagreement (over a particular step, or a way of talking about *all* the steps), but instead that we often can get what we call "agreement" much *too* quickly, too easily. And thus we may be much too quickly inclined to think that we understand what is signified by (what we conceive of as) "agreement" and "disagreement" (or "rule of computation"). Quietism is one thing, unclear apparent agreement is another. Apparent agreement may well hide and mask the very basis and nature of that agreement itself, and an agreement may well turn out to rest upon a misunderstanding of what we share. Just as we may get someone much too quickly to agree that "Yes, of course the shape and colors are part of what I see", we may get someone much too quickly to agree that "Yes, of course it is not possible to list all the real numbers" (cf. RPP I § 1107). The difficulty is not, in such a case, to decide on general grounds whether to revise the principles of logic or not, or whether to resolve an argument by taking sides Yes or No, e.g., with Hilbert or Brouwer. The difficulty is to probe wherein agreement does and does not lie, by drawing conceptual boundaries in a new way and paying attention to the details of a proof. Wittgenstein's and Turing's arguments as I have presented them here are neither revisionary nor anti–revisionary in a global way. What they do is to shift our understanding of what such global positions do and do not offer us[27].

ACKNOWLEDGEMENTS:

Thanks are due to Per Martin–Löf and the organizers of the Swedish Collegium for Advanced Studies (SCAS) conference in his honor in Uppsala, May 2009. The audience, especially the editors of the present volume, created a stimulating occasion without which this essay would not have been written. Helpful remarks were given to me there by Goran Sundholm, Soren Stenlund, Anders Oberg, Wilfried Sieg, Kim Solin, Simo Saarela, and Gisela Bengtsson. My understanding of the significance of Wittgenstein's Diagonal Argument was enhanced during my stay as a fellow 2009–2010 at the Lichtenberg–Kolleg, Georg August Universität Gottingen, especially in conversations with Felix Mühlhölzer and Akihiro Kanamori. Wolfgang Kienzler offered helpful comments before and during my presentation of some of these ideas at the Collegium Philosophicum, FriedrichSchiller Universitat, Jena, April 2010. The final draft was much improved in light of comments provided by Sten Lindstrom, Soren Stenlund and William Tait.

[27] This article has been previously published —except for the Introductory Remarkds— in P. Dybjer et al. (eds.), *Epistemology versus Ontology,* Logic, Epistemology, and the Unity of Science 27, DOI 10.1007/978-94-007-4435-6_2, © Springer Science+Business Media Dordrecht 2012 and is republished here with the kind permission of the publisher along with the Spanish translations that follows.

El argumento diagonal de Wittgenstein: una variación sobre Cantor y Turing

JULIET FLOYD

Traducción del inglés por Kurt Wischin

Apuntes introductorios para la versión en castellano:

EL ARTÍCULO "AFIRMAR" DE BRANDOM inauguró su programa del *pragmatismo* analítico, de amplios alcances, una visión que nace del objetivo de reconstruir la tradición analítica como un todo y de avanzarla de una manera sistemática. Revisitando a Frege, el padre de la tradición, Brandom muestra la importancia que la concepción de lógica fregeana de las nociones normativa, engranadas prácticamente, de *inferir, afirmar, otorgar* y *pretender*. Al integrar estas nociones él se puso en posición de sintetizar sistemáticamente dos paradigmas metódicos en la tradición analítica mediante el rechazo del punto de vista en ese entonces de moda que se enfrenta a una elección exclusiva entre una teorización semántica sistemática (privilegiando un vocabulario lógico y articulación formal) y una terapia pragmatista particularizante.

Brandom está en deuda con la interpretación de Rorty de la tradición analítica como enredada amplia y desafortunadamente con la idea cartesiana de que la esencia del lenguaje es *representar* la realidad: que las palabras se *refieren* a la realidad, y los enunciados representan, verdadera o falsamente, hechos sobre el mundo. Sólo el pragmatismo puede superar esto.

El presente trabajo, estando muy en armonía con la idea de superar esta bifurcación, desafía a las lecturas tradicionales tanto de Wittgenstein como de Turing. Turing no era ningún representacionalista cartesiano desarrollando principalmente teorías sobre la mente, sino un filósofo que daba la bienvenida a las ideas

J. Floyd (✉)
Boston University, Boston, USA
e-mail: jfloyd@bu.edu

Disputatio. Philosophical Research Bulletin
Vol. 8, No. 9, Jun. 2019, pp. 593-644
ISSN: 2254-0601 | [EN/SP] | **ARTICLE**

wittgensteinianas a su práctica lógica. Mediante la reconstrucción de lo esencial de la resolución de Turing del *Entscheidungsproblem* vemos también que el propio Turing involucró un compromiso pragmático y acción en la fundación de la lógica. Wittgenstein, además, respondió al sentido del proceso diagonal de Turing incorporando el argumento en su propia visión sobre seguir una regla y sobre juegos.

§1. Introducción

Wittgenstein empezó a redactar el 30 de julio de 1947 lo que yo llamo en lo que sigue sus «observación de 1947»[28]:

> Las «máquinas» de Turing. Estas máquinas son, ciertamente, los *humanos* que calculan. Y se podría expresar lo que él dice también en forma de *juegos*. Y, a saber, los juegos interesantes serían aquellos que lo llevarian a uno a traves de ciertas reglas a instrucciones carentes de sentido. Estoy pensando en juegos similares al «juego de carreras»[29]. Uno recibiría, por ejemplo, la orden «continúa de la misma manera» cuando esto no tiene sentido, por ejemplo, porque uno queda atrapado en un círculo; puesto que esta orden tiene sentido sólo en ciertos lugares. (Watson.)[30] [traducción del original en alemán de: Wittgenstein. *Bemerkungen über die Philosophie der Psychologie*.Werkausgabe Band 7. Frankfurt: Suhrkamp 1984]

La interpretación mejor fundamentada de este comentario la ofreció hace algún tiempo Steward Shanker, quien arguyó (1987, 1998) que su enfoque es en primer lugar la filosofía de la mente y, en particular, el conductismo incorporado en la revolución cognitivista que Turing inició. Shanker sostiene que Wittgenstein está comprometido con rechazar la tesis de Church, a saber, de que todas las funciones (humanamente) calculables son calculables con una máquina de Turing. En lo que sigue dejaré a un lado la tesis de Church: son demasiadas las cuestiones en disputa que surgen de ella para cubrir los problemas asociados, y Shanker es completamente claro acerca de que él reconstruye las implicaciones del comentario de Wittgenstein,

28 Esta parte de la observación está impresa como § 1096 de Wittgenstein et al (1980) abreviado de aquí en adelante como RPP I. Véase la nota de pie 48 más adelante para el contexto de manuscritos.

29 No he podido identificar con certeza cuál es este juego. Yo supongo que Wittgenstein está pensando en un juego de mesa en el cual se toman barajas o botones son girados para mover piezas en una carrera de caballos simulada. Véase más adelante para información más específica.

30 Alister Watson discutió el argumento diagonal de Cantor con Turing en 1935 y presentó Wittgenstein a Turing. Los tres tenían una discusión de los resultados de incompleción en el verano de 1937 que resultó en Watson (1938). Véase Hodges (1983, pp. 109, 136) y la nota de pie de página 34 más adelante.

y no su contenido específico, local. Tampoco voy a disputar la idea —promovida no sólo por Shanker, sino también por Kripke y Wright (entre muchos otros)— de que hay críticas fundamentales del funcionalismo, reduccionismo y computacionalismo acerca de la mente que es posible extraer del pensamiento del Wittgenstein tardío[31]. Shanker seguramente estaba en lo cierto al enfatizar el contexto amplio de la observación de 1947 de Wittgenstein, el cual es una exploración extendida de conceptos psicológicos. Y Wittgenstein ciertamente investigó el sentido en el cual se podría afirmar de cualquier modelo de computación como el de Turing que nos da una descripción de cómo los humanos (o cerebros humanos o todas las posibles máquinas de computación) trabajan de hecho, cuando calculan. Lo que Turing ofrece no es un «estado mental», sino algo de lo que Wittgenstein estaba pensando en términos de un «juego de lenguaje», un modelo simplificado o una toma instantánea de una parte de la actividad humana en el lenguaje, un objeto comparativo, propuesto para un objetivo analítico específico.

Turing le envió a Wittgenstein una prueba de impresión de su trabajo (1937a) famoso «On Computable Numbers, With an Application to the *Entscheidungsproblem*»[32]. Este trabajo contiene terminología como «procesos», »movimientos», «resultados», «juicios», etc. Esta manera de hablar contenía el potencial de mezclar un análisis del *Entscheidunsgproblem* de Hilbert y de la noción puramente lógica de la posibilidad codificada en un sistema formal, con una descripción de la computación humana. Según Shanker argumenta, semejantes mezclas, sin la atención necesaria a las idealizaciones involucradas, eran lo que preocupaba a Wittgenstein. Sin embargo—y estoy segura de que Shanker lo aceptaría—, están en juego otros tópicos en la observación de Wittgenstein, aparte de la filosofía de la mente o la tesis de Church. Turing no hubiera podido dar un resultado negativo al *Entscheidungsproblem* en este trabajo si su demostración hubiera estado basada en una tesis específica de la filosofía de la mente. Es importante enfatizar, en este sentido, que en su observación de 1947 Wittgenstein centraba su atención no sólo en conceptos psicológicos, sino además en problemas en la fundamentación de la lógica y matemática, y en un problema en particular que le había mantenido ocupado durante mucho tiempo, a saber, el *Entscheidungsproblem*.

En la observación de 1947, citada anteriormente, Wittgenstein de hecho alude al trabajo famoso de Turing (1937a). Él discute su contenido y luego resultados de

31 Kripke (1982), Wright (2001), capítulo 7. Véase también Gefwert (1998).

32 Véase Hodges (1983, p. 136). Cf. Turing (1937c).

indecidibilidad recientes con (Alister) Watson en el verano de 1937, cuando Turing regresó a Cambridge entre los años en Princeton[33]. Puesto que Wittgenstein había dado una formulación tempranera del problema de un procedimiento de decisión para toda la lógica[34], es muy probable que la resolución (negativa) de Turing del *Entscheidungsproblem* tuviera un interés especial para él. Estas discusiones antecedieron y, creo, estimularon y moldearon significativamente el trabajo de Wittgenstein concentrado en los fundamentos de la matemática en el período de 1940 a 1944, en particular su preocupación con la idea de que era concebible que la naturaleza de la matemática fuera totalmente *experimental*: una idea que él asoció con Turing. Además, hasta donde sabemos, Wittgenstein nunca leyó «Computing Machinery and Intelligence» de Turing (1950), el trabajo que introdujo el programa de la inteligencia artificial y la tesis de Church en la filosofía de la mente[35]. En lugar de esto, Wittgenstein en 1947 realmente estaba recordando unas discusiones que él tuvo con Watson y Turing entre 1937 y 1939 acerca de los problemas en los fundamentos de la matemática.

Estoy de acuerdo, por consiguiente, de manera general con la interpretación de Sieg del modelo de Turing con relación a la observación de Wittgenstein de 1947. Sieg la cita cuando argumenta tanto que Turing no era el mecanicista ingenuo por el cual se lo toma frecuentemente, como que Wittgenstein partió de una característica del análisis de Turing que era, de hecho, crucial para resolver el *Entscheidungsproblem*[36]. Lo que se requería para resolver el famoso problema de Hilbert era un análisis de la noción de un «método definido» en el sentido relevante: un «procedimiento mecánico» que puede ser ejecutado por humanos, i.e., computadores, recurriendo sólo a etapas cognitivas limitadas (reconocer una configuración simbólica, ver que sólo una de un número finito de reglas es aplicable, cambiar la atención paso a paso a una nueva configuración simbólica, etcétera)[37]. Un análisis como el de Turing que

33 Hodges (1983, p. 135); cf. Floyd (2001).

34 En una carta a Russell en los últimos días de noviembre o los primeros de diciembre de 1913; véase R. 23 en McGuinness (2008) o en Wittgenstein (2004). Para una discusión de la historia y las cuestiones filosóficas véase Dreben y Floyd (1991).

35 Malcolm preguntó en una carta (3 de noviembre de 1950, ahora perdida) si Wittgenstein había leído «Computing Machinery and Intelligence», preguntando si toda la cosa era una «tomada de pelo». Wittgenstein contestó (1 de diciembre de 1950) «no lo he leído, pero me imagino que no es una tomada de pelo». (Wittgenstein (2004), McGuinness (2008, p. 469).

36 Sieg (1994, p. 91); Sieg (2008, p. 529).

37 El *Entscheidungsproblem* busca, e.g., algún algoritmo que recibirá como entrada una descripción de un lenguaje formal y un enunciado matemático en el lenguaje y determinará si el enunciado es

podría conectar la noción con (ciertos aspectos limitados de una posible) actividad cognitiva *humana* era, entonces, justamente lo que se buscaba. El aspecto humano entra en un punto decisivo, cuando Turing afirma que un computador humano puede reconocer sólo un número limitado de diferentes configuraciones distintas «de un vistazo», o «de manera inmediata»[38]. El análisis conceptual de Sieg explica lo que hace el análisis de Turing de la computabilidad más vívido, más pertinente y (para usar las palabras de Gödel) más satisfactorio epistemológicamente que el de Church o que las demarcaciones extensionalmente equivalentes de la clase de funciones recursivas de Gödel, aunque sin suscribir las explicaciones propias de Gödel y Church de esta ventaja epistémica[39].

Se afirma frecuentemente (e.g. por Gödel[40]) que la analogía de Turing con un computador humano, basado en la suposición de que el computador (humano) barre y trabaja sólo con un número finito de símbolos y/o estados, conlleva fuertes suposiciones metafísicas, epistemológicas y/o psicológicas que él tenía la intención de usar para *justificar* su análisis. Desde la perspectiva que aquí se adopta, esto no es así. El modelo de Turing sólo hace explícitos ciertos rasgos característicos que señalan el concepto que se analiza en el contexto Hilbertiano específico (aquel de una *etapa* reconocible *dentro* de una computación o de un sistema formal, un «procedimiento definitivo» en el sentido relevante). No es ninguna tesis en filosofía de la mente o en matemática, sino, en lugar de eso, una suposición que se hace en un espíritu análogo a la idea wittgensteiniana de que una demostración tiene que ser perspicua (*übersichtlich, übersehbar*), i. e., algo que un humano puede captar, reproducir, apuntar, comunicar, verificar y/o articular de *alguna manera sistemática*[41].

demostrable en el sistema o no (o: si una fórmula de primer orden del cálculo de predicados es válida o no) en un número finito de etapas. Turing 1937a ofreció una demostración de que no existe semejante algoritmo, tal como hizo, aunque con una demostración diferente, el anterior Church (1936).

38 Tal como escribe Turing (1937a, p. 231): «la justificación descansa en el hecho que la memoria humana es necesariamente limitada»; cf. § 9 del ensayo.

39 Véase Sieg (2006a, b). Compare Gandy (1988). Con relación a la postura de Gödel, véase la nota de pie de página 27 más adelante.

40 Véase la nota que Gödel agregó a su «Some remarks on the undecidability results» (1972a) en Gödel (1990, p. 304) y Webb (1990). Gödel acusa a Turing (no del todo justo) de un «error filosófico» al no admitir que «*la mente, en su uso, no es estática, sino en continuo desarrollo*», como si la aplicabilidad del análisis de Turing dependería de negar que los estados mentales podrían formar una seria continua.

41 La noción de *perspicuidad* de Wittgenstein ha atraído mucha atención. Dos trabajos que arguyen, como lo haría yo, que no implica ninguna tesis epistemológica restrictiva ni ningún antropologismo reductivo son Marion (2011) y Mühlhölzer (2010).

Si miramos con atención el contexto de la observación de 1947 de Wittgenstein, nos damos cuenta de que es la *argumentación* de Turing como tal la que es el objeto de su reflexión, el *uso* que Turing hace de un modelo abstracto de la actividad humana de hacer un argumento diagonal, y ninguna cuestión referente a la explicación o la descripción psicológica de una actividad mental humana como tal. Esto es posible notarlo no sólo al subrayar, como lo hace Sieg, que el análisis de Turing no requiere ninguna descripción general en este sentido, sino también al darnos cuenta de que inmediatamente después de su observación de 1947, Wittgenstein formula una «variante» novedosa del argumento diagonal de Cantor.

El objetivo del presente ensayo es plantear lo que llamaré en lo que sigue el *argumento diagonal de Wittgenstein*. Mis objetivos principales que son: demostrar, que *es* un argumento distintivo, que es una *variante* de los argumentos de Cantor y de Turing, y que se *puede* usar para llevar a cabo una demostración. Un análisis completo del significado de la observación de 1947 dentro del contexto de la filosofía de Wittgenstein espera otra ocasión, aunque en la sección final abordaré varios tópicos de interpretación.

Al presentar el argumento diagonal de Wittgenstein procederé de la siguiente manera. Primero (Sección 2.1) reviso brevemente el problema de la parada, basado en una aplicación muy conocida de la argumentación diagonal. Mientras el argumento en sí no aparece en el trabajo de Turing (1937a), en términos estrictos, uno muy cercano sí aparece al principio del § 8 (Sección 2.2). Turing, sin embargo, formula otro argumento —más bien algo diferente— inmediatamente después; un argumento que apela a la noción de la computación por una máquina de una manera más concreta, mediante la construcción de lo que llamaré una *máquina sin cursor* (Sección 2.3). Luego (3) presento el argumento diagonal de Wittgenstein, arguyendo que tiene su origen en su lectura del §8 de Turing. Y luego (4) presentaré una versión «positiva» de la paradoja de Russell que es análoga a los argumentos de Wittgenstein y Turing y que hace surgir cuestiones interesantes en sí misma. Finalmente (5) cubriré algunos de los tópicos filosóficos e históricos que estas demostraciones hacen surgir.

§ 2. Tres argumentos diagonales

§ 2.1. El problema de la parada

Aunque, estrictamente hablando, no ocurre en Turing (1937a), el, así llamado, «problema de la parada» es un ejemplo accesible y bien conocido de la argumentación diagonal, y empezaré con él[42].

La totalidad de las máquinas de Turing en una variable se puede enumerar. Turing presentó en (1937a) su modelo de máquina como «tablas esqueléticas» y asoció con cada máquina en particular un «número de descripción» (**N. D.**) único gödelizándolo de esta manera; lo usual, hoy en día, es interpretar una máquina de Turing como conjunto de cuádruples. En la interpretación moderna, una máquina de Turing t tiene como su comportamiento de inputs y outputs una función parcial $f : N \rightarrow N$ como sigue: t es presentada con una configuración inicial que codifica un número natural j según un protocolo especificado, y t procede entonces pasa a paso a través de sus instrucciones. En caso de que t adopte un estado de parada específico con una configuración que codifica un número natural k según el protocolo, entonces $f(j) = k$ y se dice que *f converge en j*, lo que se escribe como «$f(j)\downarrow$». De lo contrario, se dice que *f diverge en j*, lo que se escribe como «$f(j)\uparrow$». En general, f es parcial a causa de esta última posibilidad.

Si se enumeran las máquinas de Turing como t_i, entonces obtenemos las funciones f_i parciales correspondientes: $N \rightarrow N$, y se dice de una función parcial $g: N \rightarrow N$ que es *calculable* si es un f_i. El conjunto de máquinas de Turing es definible y enumerable de esta manera, pero representa el conjunto de las funciones *parcialmente* calculables. Debido a ello, no es posible diagonalizar partiendo de la lista de funciones calculables, es decir, de una lista, e.g. de los números reales en una representación binaria (como en el argumento de Cantor de 1891). En otras palabras, la secuencia diagonal alterada, no obstante de estar definida como una función, no es una función calculable en el sentido de Turing.

Esta última idea es lo que debería ser demostrado (una vez que la equivalencia con los sistemas formales se hace explícita, este resultado es lo que da la resolución negativa de Turing del *Entscheidungsproblem*).

Para aclarar esto, consideremos una disposición binaria, concebida como indicando *por medio* de «$\uparrow$» que la máquina de Turing t_i diverge en una entrada j, y *por medio* de «$\downarrow$» que converge en una input j. Cada t_i calcula una función parcial f_i: $N \rightarrow N$ sobre los números naturales, interpretada como una secuencia binaria.

42 El argumento de Turing en 1937a en el § 8 no está formulado como un problema de parada; esto se hizo posteriormente, probablemente por Martin Davis en una lección de 1952. Para detalles adicionales sobre la prioridad histórica, véase *http://en: wikipedia.org/wiki/Halting_problem#History_of_the_halting_problem* y Copeland (2004, p. 40, n. 61).

t_1 ↑↑↓↓↑···

t_2 ↓↓↑↑↓···

t_3 ↓↓↓↑↑···

t_4 ↑↑↑↑↓···

t_5 ↓↑↓↑↓···

...

El método de Cantor del argumento diagonal se aplica como sigue: según Turing mostró en el §6 de (1937a), existe una máquina de Turing universal UT_1. Ella corresponde a una función parcial $f(i, j)$ de dos variables, dando la output para t_i para la entrada j, simulando de esta manera el comportamiento de inputs y outputs de cada t_i en la lista. Ahora construimos D, la máquina diagonal, con la función de variable única correspondiente que calcula sobre la input i UT_1 (i, i). D está bien definida, y corresponde a una función (calculable, parcial) bien definida.

Ahora bien, suponemos que podamos definir una máquina de Turing C «contraria» que invierte el comportamiento de entradas y salidas de D como sigue: C, con la configuración inicial codificando j, procede entonces, paso a paso, por la computación de D(j) y sigue luego la siguiente regla:

(*) Si D(j)↓, entonces C(j) = ↑;
Si D(j)↑, entonces C(j) = 1

En otras palabras, si D(j) converge, entonces pasa a instrucciones que nunca paran, y si D(j) diverge, entonces descarga el código para 1 y entra el estado de parada.

Existe, sin embargo, una contradicción en la suposición de que se puede seguir esta regla, o que pueda ser implementada por una máquina que está en algún sitio en la lista de las máquinas de Turing. ¿Por qué? Si C fuera una máquina Turing, entonces sería t_k para algún *k.* Considérese entonces t_k para la entrada *k*. Según la regla (*), si t_k converge con *k*, entonces diverge con *k*; pero si diverge con *k*, entonces converge con *k.* Entonces, t_k converge con *k* si y sólo si diverge con *k*. Esta contradicción indica que nuestra suposición era falsa.

La regla (*) supone conocimiento de LA parada, es decir, que la máquina C pueda llegar a una conclusión acerca del comportamiento de D con cualquier entrada *j*, y seguir la regla (*). Pero tener semejante conocimiento requiere pasar por todas las etapas con un número (posiblemente) infinito, de la máquina D. Y éste procedimiento mismo no es uno que podríamos expresar por medio de una regla para una máquina de Turing de variable única. En otras palabras, el conocimiento de parada no es computable con una máquina Turing.

Aquí surgen problemas clásicos de la filosofía sobre la negación en contextos infinitos —la inquietud acerca de lo que significa una totalidad de etapas completadas como meramente una etapa más. Turing mismo lo reconoció. En (1937b) él publicó algunas correcciones a su trabajo (1937a). El primero arregló un defecto en una definición que le había señalado Bernays, restringiendo una clase de reducción que él había formulado para el problema de la decisión. El segundo, también a sugerencia de Bernays, hizo que su análisis fuera más general, mostrando que su definición de «número computable» se puede usar independientemente de la selección de la lógica. Turing le escribió a Bernays (22 de mayo de 1937) que, cuando él escribió el trabajo original de (1937a), «Yo estaba tratando "computable" de una manera demasiado similar a como uno podría tratar "algebraico", con el uso irrestricto del principio del tercero excluido. Aun si esto suena inocuo, hubiera estado bien tratar esto diferentemente» (1937d). En su corrección (1937b) él modifica los medios por los cuales los números computables son asociados con secuencias computables, citando la noción de Brouwer de una secuencia de elección que se solapa, en el sentido sugerido por Bernays[43]. Esto evita lo que Turing llama una «situación desagradable» que surge en su argumento inicial: aunque se puede invocar la ley del tercero excluido para demostrar que *existe* una máquina de Turing que calculara una función (e.g. la constante de Euler), puede ser que no tengamos los medios para *describir* semejante máquina (Turing 1937b, p. 546). El precio de la generalización de

[43] Cf. Bernays a Turing, 24 de septiembre de 1937 (Turing 1937d). Las correcciones, usando la noción de Brouwer de una secuencia solapante se explican en Petzold (2008, pp. 310 ss.) Petzold especula que unas conversaciones con Church en Princeton (o con Weyl) pueden haber estimulado el interés de Turing en remodelar su demostración, aunque sospecha que «el trabajo de Turing y sus conclusiones son tan inusuales que ... no estaba trabajando dentro de la vista filosófica prescrita por *nadie*» (2008, p. 308). Estoy de acuerdo. En términos de posibles influencias sobre Turing, se debería mencionar a Bernays, y Wittgenstein se debería agregar a ellas. La idea de expresar una regla como dispositivo de tabla–cum–calculación que se puede consultar por un ser humano era prevalente en la filosofía de Wittgenstein desde el principio, formando parte del distintivo aroma en el aire de Cambridge en los primeros años 1930, y se discute de manera explícita en su Wittgenstein (1980).

Turing es que los números reales ya no reciben representaciones únicas mediante secuencias de figuras. El beneficio es que la aplicabilidad de sus definiciones ya no depende de la invocación de la ley del tercero excluido en contextos infinitos. Él explica que la pérdida «es de poca importancia teorica, puesto que la [descripción de los números de máquinas de Turing] de todas maneras no son unívocas» y la «totalidad de los números computables [permanece] sin alteración» (Turing 1937b, p. 546). En otras palabras, su caracterización de los números computables es robusta con relación a su representación por este o aquel sistema formal, esta o aquella elección de lógica, o cualquier análisis específico de lo que un número real realmente *es*. Hoy en día diríamos que la clase de los números computables es *absoluta* con relación a su representación en este o aquel sistema formal[44]. Y esto también está relacionado con la calidad antropomórfica de su modelo. Porque no es parte de la actividad normal de un computador humano, ni el concepto general de una persona que trabaja *dentro* de un sistema formal del tipo en cuestión, adoptar una posición respecto a la ley del tercero excluido.

§ 2.2. El primer argumento de Turing

Las definiciones de Turing (1937a) son como sigue: una ***máquina no circular*** es una máquina que, colocada en una configuración inicial particular, imprime una secuencia infinita de 0 y 1 (espacios blancos y otros símbolos son considerados por Turing como auxiliares para la memoria, análogos a un papel de borrador; en todo caso, sólo estos símbolos son los que eventualmente se borran). Una ***máquina circular*** no cumple con esto y nunca anota más que un número finito de 0 y 1 (a diferencia de una máquina de Turing contemporánea, para Turing las máquinas *satisfactorias* imprimen entonces

[44] Gödel, preocupado con su propia noción de recursividad general al formular la propiedad de lo absoluto (en 1936) se dio cuenta posteriormente de la importancia de esta noción en conexión con la independencia del análisis de Turing de cualquier selección particular de formalismo. El apuntó que con el análisis de computabilidad de Turing «se tuvo éxito por vez primera en dar una definición absoluta de una noción epistemológica interesante, i.e., que no dependa del formalismo elegido» (Gödel se refiere aquí a un sistema formal del tipo relevante (axiomatizable recursivamente, de lenguaje finitario). Véase la pieza de Gödel de 1946: «Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems in mathematics» en Gödel (1990, pp. 150–153); compárese su postscriptum de su ensayo (1936a) «On the Length of Proofs», Ibid., p. 399. Véase la nota de pie de página 27 y Sieg (2006a, b, en particular pp. 472 ss.).

secuencias infinitas de 0 y 1, mientras que las máquinas *insatisfactorias* quedan «atoradas» (véase la nota de pie de página 25)). Un ***número computable*** es un número real que difiere en un número entero de un número computado por una máquina no circular (i.e. su expansión decimal (binaria) coincidirá, en su parte de números no enteros, con la serie infinita de 0 y 1 impresa por alguna máquina no circular); éste es un número real de cuya expresión binaria (decimal) se dice que es ***calculable por medios finitos***. Una ***secuencia computable*** es una secuencia que puede ser representada (computada) por una máquina no circular.

El primer argumento empieza en el § 8. Turing hace una distinción entre la aplicación del argumento diagonal original de Cantor y la versión que él aplicará en su trabajo:

> Se podría pensar que los argumentos que demuestran que los números reales no son enumerables, demostraría también que los números y secuencias computables no pueden ser enumerables. [n. Cf. Hobson, *Theory of functions of a real variable* (2nd ed., 1921), 87, 88]. Se podría pensar, por ejemplo, que el límite de una secuencia de números computables tiene que ser computable. Esto claramente es verdad sólo si la secuencia de números computables es definida por alguna regla.
>
> O podríamos aplicar el proceso diagonal. «Si las secuencias computables son enumerables, que α_n sea *n–ésima* secuencia computable, y que $\Phi_n(m)$ sea su *n–ésima* figura. Puesto que β es computable, existe un número K tal que $1-\Phi_n(n) = \Phi_K(n)$ [para] todos los *n.* Si ponemos $n = K$, entonces tenemos $1 = 2\Phi_K(K)$, i.e., 1 es par. Esto es imposible. Por consiguiente, las secuencias computables no son enumerables».

El argumento que Turing presenta entre comillas pretende demostrar que los números computables no son enumerables, de la misma manera como los números reales no lo son, de acuerdo al argumento diagonal original de Cantor. (Deberíamos tomar nota de que su estructura es reminiscente de la máquina contraria, esbozada en el problema de la parada precedente, que cambia un tipo de dígito binario a otro, «negando» todas las etapas a lo largo de la diagonal.) Turing, sin embargo, responde:

> La falacia en este argumento radica en la suposición de que β sea computable. Esto sería verdad, si pudiéramos enumerar las secuencias computables con medios finitos [JF: es decir, mediante una máquina no circular], pero el problema de enumerar secuencias computables es equivalente al problema de averiguar si un número dado es el N.D. [Tr.: *número de descripción*] de una máquina no circular, y no tenemos ningún proceso general para hacer esto en un número finito de etapas. De hecho, aplicando correctamente el argumento del proceso diagonal podemos demostrar que no puede haber semejante proceso general.

Esta aplicación «correcta» del argumento diagonal es, en su conjunto, un argumento *semántico* en el sentido de la ciencia computacional: se ocupa de secuencias (e.g. β) y la naturaleza de sus posibles caracterizaciones. La «falacia» en pensar que el argumento diagonal de Cantor *pueda* ser aplicado para demostrar que los números computables no sean enumerables (i.e., en el sentido cantoriano original de enumerable como «contable») consiste en que resulta que estaremos en posición de rechazar la aseveración de que la secuencia β sea computable. No hay, entonces, ninguna salida de diagonalización. La suposición de que α_n, la enumeración de secuencias computables sea enumerable por *medios finitos*, es falsa. El primer argumento de Turing rechaza esta aseveración (muy similar como al del argumento de la parada arriba) mediante la generación de la contradicción que él describe: esto se sigue de tratar el problema de enumerar todas las secuencias computables por medios finitos (i.e. por una máquina no circular) como «equivalente» al problema de encontrar un proceso general para determinar si un número arbitrario dado es, o no es, la descripción de una máquina no circular. Esto, escribe Turing —inicialmente sin argumento— no lo podemos llevar a cabo en todos los casos en un número finito de etapas.

Turing, sin embargo, escribe de inmediato que el primer argumento «no obstante de ser perfectamente válido» tiene una «desventaja», a saber, que puede, no obstante, «dejar al lector con la sensación de que "algo debe estar mal"». Turing se mantiene, hasta aquí, poco más que intuitivo acerca de nuestra incapacidad de construir una máquina no circular que determinará si un número es, o no es, un número de descripción de una máquina no circular. Y no ha demostrado de hecho cómo se habría de reducir el problema original a aquel. En el mejor de los casos se ha apoyado en la idea de que una cinta infinita no puede pasar hasta el final en un número finito de etapas. Mientras esto está bien hasta donde va, Turing está buscando algo diferente, algo más riguroso.

§ 2.3. El argumento de la máquina sin cursor

Turing ofrece de inmediato un segundo argumento, el cual, según dice, «ofrece cierta comprensión del significado de la idea "no circular"». Llamaré a esto el *argumento de la máquina sin cursor* para indicar una conexión con la idea wittgensteiniana de la lógica compuesta al menos en parte de tautologias, i.e., oraciones que aparentemente tienen sentido pero que son, bajo reflexión adicional, *sinnlos*, carentes de dirección, como dos vectores que producen nada excepto un punto carente de dirección al agregarlos, conteniendo «cero» información direccional[45]. Puesta que la de Turing es la primera publicación en la que se construye un modelo para discutir la computabilidad en principio, ella es de gran importancia histórica y, por consiguiente, vale la pena repasarla por su valor inherente. Más importante para mi objetivo presente es que es *ella* el argumento que el argumento diagonal de 1947 de Wittgenstein formuló en términos de juegos.

El segundo argumento de Turing tiene la intención de aislar de manera más perspicua la dificultad indicada en su primer argumento. Éste funciona al considerar la manera de definir una máquina $\mathcal{H}$, usando una enumeración para todas las máquinas de Turing, para computar directamente determinada secuencia β′ cuyos dígitos son extraídos de $\Phi_n(n)$ a lo largo de la secuencia diagonal que surge de la enumeración de todas las secuencias computables α_n. Recordémonos de § 2.2 arriba, que α_n es la n–ésima secuencia computable de la enumeración de las secuencias computables (i.e. aquellas secuencias que son computables por una máquina no circular); $\Phi_n(m)$ es la m–ésima figura en α_n. β, que se usa en el primer argumento, es la secuencia «contraria» consistiendo de una serie de 0 y 1 surgiendo de un cambio de 0 a 1 y viceversa a lo largo de la secuencia diagonal, $\Phi_n(n)$. En cambio, β′ es la secuencia cuya n–ésima figura es la salida de la n–ésima máquina no circular en respuesta a la entrada n: β′ corresponde a $\Phi_n(n)$, del cual podemos pensar como una secuencia diagonal *positiva*. Su construcción dejará en claro cómo es ésta la manera en que uno concibe la enumeración de α_n, lo que es lo importante (a través de medios finitos o no por medio finitos).

Las máquinas de Turing se pueden enumerar, puesto que cada una tiene un número de descripción k «estándar». Ahora bien, supongamos que haya un proceso definido para decidir si un número arbitrario es, o no es, él de una máquina no circular. Es decir, que haya una máquina $\mathcal{D}$ que, dado el número de descripción k estándar de una máquina de Turing $\mathcal{M}$ arbitraria, hará la prueba que vea si k es el número de una máquina circular o no. Si $\mathcal{M}$ es circular, entonces $\mathcal{D}$ producirá la salida «*u*» (para «no satisfactorio») y si $\mathcal{M}$ no es circular, entonces $\mathcal{D}$ producirá la salida «s» (para «satisfactorio») para k. $\mathcal{D}$ enumera α_n por medios finitos. Al combinar $\mathcal{D}$ con la máquina universal $\mathcal{U}$, podemos construir una máquina $\mathcal{H}$. $\mathcal{H}$ está diseñada para computar la secuencia β′. Resulta, sin embargo, que es (lo que yo llamo) una *máquina sin cursor*, según podremos ver de su caracterización.

45 Compárese la discusión en Dreben y Floyd (1991)

$\mathcal{H}$ procede como sigue para computar β’: su movimiento se divide en dos secciones. En la primera sección *N*–1 los números enteros 1, 2, ... *N*–1 fueron probados por $\mathcal{D}$. Determinado número de éstos, digamos *R*(*N*–1), se marcaron «*s*», es decir, son números de descripción de máquinas no circulares. En la sección *N*–ésima la máquina prueba el número *N*. Si *N* es satisfactorio, entonces *R*(*N*) = 1 + *R*(*N*–1) y se calculan las primeras figuras *R*(*N*) de la secuencia cuyo número de descripción es *N*. $\mathcal{H}$ anota la *R*(*N*)–ésima figura de esta secuencia. Esta figura será una figura de β’, puesto que es la salida a *n* de la *n*–ésima máquina de Turing no circular en la enumeración de α_n por medios finitos que se supone que $\mathcal{D}$ suministra. De lo contrario, si *N* no es satisfactorio, entonces *R*(*N*) = *R*(*N*–1) y la máquina continúa a la sección (*N*+1)–ésima sección de su movimiento.

$\mathcal{H}$es no circular bajo la suposición de que $\mathcal{D}$ exista. Dejemos ahora que *K* sea el D.N. de $\mathcal{H}$. ¿Qué es lo que $\mathcal{H}$ hace en respuesta a la entrada *K*? Puesto que *K* es la descripción del número de $\mathcal{H}$, y $\mathcal{H}$ es no circular, el veredicto dado por $\mathcal{D}$ no puede ser «*u*». Pero el veredicto tampoco puede ser «*s*». Ya que si lo fuera, $\mathcal{H}$ anotaría el dígito K–ésimo de la secuencia computada por la máquina no circular *K*–ésima en α_n como el dígito K–ésimo de β’, a saber, por $\mathcal{H}$ misma. La instrucción para $\mathcal{H}$ para la entrada *K* sería, sin embargo, «calcula las primeras figuras *R*(*K*) = *R*(*K*–1)+1 computadas por la máquina con el número de descripción *K* (es decir: $\mathcal{H}$) y anota la *R*(*K*)–ésima». La computación de las primeras figuras *R*(*K*)–1 se llevaría a cabo sin problema. Pero las instrucciones para el cálculo de la *R*(*K*)–ésima figura resultaría ser «calcula las primeras *R*(*K*) figuras computadas por $\mathcal{H}$ y anotar la *R*(*K*)–ésima». Este dígito «no se encontraría nunca», como dice Turing. Ya que en la *K*–ésima etapa resultaría ser «circular», contrariamente al veredicto «*s*» y la suposición original de que $\mathcal{D}$ existe ((1947a), p. 247). Ya su sus instrucciones en la *K*–ésima etapa equivalen a la orden «circular» de «haz lo que haces».

El primer argumento y el argumento de Turing partiendo de la máquina sin cursor son argumentos constructivos en el sentido clásico: ninguno de ellos apela a la ley del tercer excluido para razonar sobre objetos infinitos. Además, la corrección de Turing (1937b) demostró que cada uno se puede echar a andar sin la suposición de que las descripciones estándares de máquina están asociadas unívocamente con números reales, i.e., sin presuponer la aplicación de la ley del tercer excluido tampoco aquí. Ambos son, finalmente, argumentos sobre computabilidad, como el argumento de parada: aplicaciones del proceso diagonal en el contexto de máquinas de Turing.

Pero el argumento desde la máquina sin cursor es más concreto que el primer argumento y que el argumento de la parada. Y se distingue porque no pide que integremos la aplicación de negación *en* la máquina. La máquina sin cursor es una máquina que construimos y luego la observamos y rastreamos sus movimientos. La dificultad que ella señala no es que $\mathcal{H}$ haga surgir la posibilidad de construir otra secuencia contraria que genera una contradicción. En lugar de esto, el argumento es semántico de otra manera: la máquina $\mathcal{H}$ sin cursor hace surgir una estructura de comandos que es vacía, tautológica, carente de sentido. No produce una contradicción, sino un círculo vacío, algo así como el comando «haz lo que se te diga que hagas». En el presente contexto, esto significa que $\mathcal{H}$ no puede *hacer* nada. Tal como Wittgenstein formuló en 1947, una línea de comandos «tiene sentido sólo en ciertas posiciones».

§ 3. El argumento diagonal de Wittgenstein

Inmediatamente después de su observación de 1947 acerca de que las «máquinas» de Turing son «humanos que calculan», Wittgenstein también formula a su vez un argumento diagonal. Este «expresa» el argumento de Turing «en forma de juegos» y se debería tomar como parte de esta primera observación.

> Una variante de la demostración diagonal de Cantor:
>
> *N* = *F* (*k, n*) sea la forma de las leyes para el desarrollo de fracciones decimales. *N* es el *n*–ésimo lugar decimal del K–ésimo desarrollo. La ley diagonal es, entonces: *N* = *F* (*n, n*) = Def. *F'*(*n*).
>
> Se tiene que demostrar que *F'*(*n*) no puede ser una de las reglas *F*(*k, n*).
>
> Supongamos que sea la cent–ésima. La regla para la formación entonces es
>
> de *F'*(1) *F*(1, 1)
>
> de *F'*(2) *F*(2, 2) etc.
>
> pero la regla para la formación del centésimo lugar de *F'*(n) será *F*(100,100), es decir, sólo nos dice que el centésimo lugar debe ser igual a sí mismo, es, entonces, para *n* = 100 *ninguna* regla.
>
> [Es que yo siempre he tenido la sensación de que la demostración de Cantor hacía *dos* cosas, pero *parece* hacer sólo una.]
>
> La regla del juego dice «¡haz lo mismo que ...!» — y en el caso particular se vuelve ahora «¡haz lo mismo que aquello que haces!»[46]

[46] Wittgenstein (1999, MS 135, p. 118); los corchetes indican un pasaje que se omitió posteriormente cuando la observación se mudó a Wittgenstein (1999, TS 229 § 1764, publicada como RPP I § 1097). (En *Zettel* § 694 se publica sólo la segunda observación con relación a la demostración, separándola de esta manera de la mención de Turing y Watson (Wittgenstein (1970), de aquí en adelante Z). El argumento, tal como se anota aquí, se da aquí con «F» reemplazando la «*Φ*» original, siguiendo en esto a la tipografía.

Como vemos, es el argumento de la máquina sin cursor el que Wittgenstein traduce al vocabulario de juegos de lenguaje en 1947. La referencia a Turing y Watson no es gratuita. Además, el argumento tenía tradición. Kreisel dio el credito a Wittgenstein posteriormente por «una manera muy nítida de formular el punto» del uso que Gödel hace del argumento diagonal para demostrar la incompleción de la aritmética, en términos de comandos vacíos, «escribe lo que escribes» (1950, p. 281s.)[47].

Probaremos el argumento de Wittgenstein para demostrar que constituye una demostración genuina. Wittgenstein empieza por imaginar una «forma» de una ley para enumerar las «fracciones decimales» (*Dezimalbrüche*). Podemos presumir que Wittgenstein está pensando en números racionales y sabemos, en el caso de los números racionales, que semejante ley o regla (e.g. un listado) puede enumerar la totalidad exhaustivamente. Según Cantor demostró, esto no es verdad para la totalidad de los números reales. La argumentación que Wittgenstein plantea SE aplica, sin embargo, se agote o no la presentación de la lista un conjunto: únicamente supone que la presentación utiliza la expresión de reglas para el desarrollo de fracciones decimales, una manera de «desarrollarlas» o explicitarlas que utiliza un modo numerable de expresión. Además, el alemán de Wittgenstein habla del desarrollo de fracción decimal (*Entwicklung von Dezimalbrüchen*), y normalmente en alemán se entiende que esta terminología (*Dezimalbruchentwicklung*) cubre también la extensión de los números reales[48]. Wittgenstein bien puede haber pensado, entonces, también en (un subconjunto) de los números reales, e.g., los números reales computables. «Forma» aquí supone un espacio de representaciones *posibles*: significa que podemos imaginar una enumeración de cualquier manera que nos guste, y Wittgenstein no restringe su presentación. En otras palabras, él articula una *forma* generalizada de argumentación diagonal. El argumento de esta manera es aplicable de manera general, no sólo a fracciones decimales, sino a cualquier presunta lista o expresión de ellas, gobernadas por reglas; no depende de ningún dispositivo de notación particular ni ninguna disposición espacial de signos preferida. En este sentido, el argumento de Wittgenstein no apela a ninguna imagen y no es esencialmente diagramático o representacional, no obstante es posible presentarlo como diagrama (y, naturalmente, en cuanto es un argumento *lógico*, su lógica se

47 Véase también Stenius (1970) para otro planteamiento general a las antinomias que distingue entre reglas contradictorias (que no se pueden seguir) y conceptos contradictorios (e.g., «el cuadrado redondo») que se basa explícitamente en una lectura de Wittgenstein (en este caso, del *Tractatus*).

48 Acerca del alemán, véase http://de.wikipedia.org/wiki/Dezimalbruch y http://de.wikipedia.org/wiki/Dezimalsystem#Dezimalbruchentwicklung.

puede representar formalmente)[49]. No depende de ningún formalismo en particular, al igual que los argumentos de Turing. A diferencia de los argumentos de Turing, invoca explícitamente la noción de un juego de lenguaje y apela a (y presupone) una concepción común de *reglas* y de los *humanos que las siguen*[50]*.* Cada línea en la precedente presentación diagonal es concebida como una instrucción o como comando, análogamente a una orden dada por un ser humano.

Para aclarar estas ideas, imaginémonos una enumeración de fracciones decimales en el intervalo de unidades en forma decimal binaria. Sea, entonces, N = F(*n,n*) = Def F'(*n*), cuya representación gráfica es la línea diagonal en la imagen que sigue:

	1	2	3	4	5	...
r_1	0	0	1	1	0	...
r_2	1	1	0	0	1	...
r_3	1	1	1	0	0	...
r_4	0	0	0	0	1	...
r_5	1	0	1	0	1	...
...						

Está clara la regla para calcular F'(*n*): vete a la diagonal de esta lista, toma el valor de r_n para la entrada *n*. Esta regla parece ser perfectamente comprensible y, en *este* sentido, está bien definida. No está determinado, sin embargo, en el sentido de que en cada una de las etapas sepamos qué hacer con ella. ¿Por qué? La «variante» de

49 Recuerde que en sus observaciones anteriores de 1938 acerca del argumento diagonal de Cantor, Wittgenstein estaba preocupado por la idea de que se podría pensar que la demostración dependa de interpretar un tipo particular de imagen o diagrama de cierta manera. Wittgenstein (1978, parte II). Hay muchas partes problemáticas de estas observaciones y espero discutirlas en otro ensayo. Por ahora sólo observo que son mucho anteriores a las observaciones de 1947 que discuto presentemente, anotadas bajo el efecto inmediato de sus discusiones del verano de 1937 con Watson y Turing.

50 Aunque Turing escribió él mismo que «estos resultados [limitativos] y algunos otros resultados de la lógica matemática se pueden considerar como progresando algo en dirección a una demostración, dentro de la propia matemática, de lo inadecuado que es una «razón» que no es soportada por el sentido común». Turing (1945, p. 23).

Wittgenstein del argumento diagonal de Cantor —es decir, del argumento de Turing de la máquina sin cursor— es esta:

Supongamos que la función F' es un desarrollo de una fracción decimal en la lista, digamos, la centésima. La «regla de la formación» aquí, según escribe Wittgenstein, «dirá F(100,100)». Pero esto

> ... sólo nos dice que el centésimo lugar debe ser igual a sí mismo, es, entonces, para *n* = 100 *ninguna* regla.
>
> La regla del juego dice «¡haz lo mismo que ...!» — y en el caso particular se vuelve ahora «¡haz lo mismo que aquello que haces!». (RPP I § 1097, arriba citado).

Tenemos aquí una orden que, como la máquina $\mathcal{H}$ de Turing, «cayó en un círculo» (cf. RPP I § 1096, también citado arriba)[51]. Si uno se imagina recoger una carta en un juego de mesa que dice «haz lo que esta tarjeta te diga que hagas» o «haz lo que haces», yo pienso que tenemos una buena representación cotidiana del tipo de fenómeno en que Wittgenstein se apoya.

La forma de círculo de Wittgenstein, a diferencia del de Turing, es expresada explícitamente en términos de una tautología. Y el argumento de Turing se distingue —al pensarlo— precisamente porque produce una tautología de cierta especie. En un sentido, Wittgenstein *literaliza* el modelo de Turing, regresándolo a la cotidianidad, y aterrizando las metáforas antropomórficas, a manera de comando, de Turing.

Yo dije que Wittgenstein presenta una demostración genuina en su observación de 1947, y he estado dispuesta a considerarlo una «variante» de la argumentación diagonal de Cantor. Una advertencia estaría bien, sin embargo. El argumento no puede sobrevivir A una construcción en términos de una manera de pensar

[51] Watson usa la metáfora de que la máquina «queda atorada» (Watson 1937, p. 445), pero yo no he encontrado esta metáfora ni en Wittgenstein, ni en Turing: es más bien ambigua y no distingue entre el primer argumento de Turing de aquel de la máquina sin cursor. Tanto Watson como Turing asistieron a las lecciones de Wittgenstein de 1939 en Cambridge; véase (Wittgenstein 1989) donde la metáfora de un «bloqueo» o «atoramiento» es criticada. Yo supongo que esto se da como respuesta a una preocupación sobre la manera de expresar las cosas que se encuentra en Watson 1937. Él se preocupa que la metáfora de la máquina podría hacer surgir una perspectiva de lógica que es, o bien, muy psicologista, o muy experimental. Él enfatiza, característicamente, que, en lugar de esto, lo que importa al enfrentarnos a una contradicción es que no reconozcamos ninguna acción como cumpliendo una orden en particular; decimos, e.g., que «no tiene sentido». Tal como él escribe en sus observaciones de 1947 que consideramos aquí, «una orden tiene sentido sólo en ciertas posiciones». Recuerde Z § 689: «¿Por qué se habría de temer una contradicción más que una tautología»?

puramente extensional, y esta manera de pensar es requerida para el contexto en que se plantea el argumento de Cantor, un contexto en el cual se razona sobre y con objetos infinitos. Lo que se demuestra en el argumento de Wittgenstein es que bajo la suposición no se puede calcular F'(100). Pero no porque la tarea es infinita. En su lugar, se nos da una regla que, según escribe Wittgenstein, «*no* es una regla» en el mismo sentido. Hay algo que *es* —hablando en términos extensionales— en sí el valor de F(100,100), y éste es, o bien 0, o bien 1. Pero si preguntamos *qué* dígito es, no encontramos con la respuesta «F(100,100)» que no dice qué es ni en un sentido ni en el otro, porque esto depende de la suposición que la secuencia es el valor de F'(100) en 100. La regla diagonal, en otras palabras, no se puede aplicar en esta etapa. Y no tenemos otros recursos para referirnos a *él* que es o bien 0 o bien 1 por medio de otra regla o articulación en la lista que podemos *seguir*.

Un resultado de las demostraciones, tanto de Turing como de Wittgenstein, es que el punto de vista extensional no es, o no es de manera exclusiva, una perspectiva en los fundamentos de la matemática. La versión de Wittgenstein del argumento desde la máquina sin cursor muestra que la regla particular, F'(*n*), no se puede identificar con ninguna de las reglas de la lista, ya que no puede ser aplicada si intentamos pensar de ella como un miembro particular de la lista. El argumento exhibe un «cruce de imágenes» o de conceptos que produce algo nuevo. Si uno quiere, demuestra que hay un número que no es un número dado en la lista, porque muestra cómo se ha de construir una regla para una secuencia de 0 y 1 que no puede ser una regla en la lista como las demás. El argumento SE aplicaría, además, en cualquier contexto en el cual se afirma de los números reales, articulables como regla («computables») que son listados o enumerados de cualquier manera de acuerdo a una regla — inclusive, desde luego, cualquier contexto en el cual de manera más controvertida una supone que *sólo* los números reales articulables por regla *son* números reales. Esta suposición, sin embargo, no es esencial para los argumentos ni de Turing ni de Wittgenstein, los cuales no requieren semejantes implicaciones o suposiciones necesariamente constructivistas revisionarias o finitistas.

Para resumir: a diferencia del problema de la parada o el primer argumento que presenté arriba, el argumento de Wittgenstein no se aplica a la ley del tercer excluido, ni a ninguna otra contradicción o negación explicitas *por* la máquina. No es proposicional, pero en un sentido puramente conceptual o ejecutivo, gira sobre la idea de un comando expresando coherentemente que resulta vacío al reflexionar sobre él, generando de esta manera una regla, de la cual podemos *ver* que no puede ser aplicada de la misma manera en la que otras reglas pueden ser aplicadas. No hay, desde luego, ninguna apelación a estándares de acuerdo en toda la comunidad ni ninguna estipulación explícita que se usara para sacar la conclusión. No es, por tanto, un argumento puramente «convencional», aunque nosotros vemos que la orden no podría ser ejecutada por nadie. Extrañamente, justo porque gira sobre una tautología, su conclusión es «positiva»: «construye» una regla formulable que no puede ser identificada literalmente con ninguno de los comandos–regla en la lista de reglas que se supone nos es dada. La diagonal le da a uno entonces una manera positiva de crear algo nuevo, es decir, una instrucción que no puede ser seguidA sensatamente.

Antes de hacer más comentarios sobre esta versión de la demostración, deseo subrayar que tal como yo la he construido no hay ningún *rechazo* de los resultados de Turing o Cantor que se implicara al aceptar el argumento diagonal de Wittgenstein. Para dejar esto claro, ensayaré brevemente un argumento análogo.

§ 4. La paradoja positiva de Russell

Consideremos una vez más la disposición binaria de 0 y 1, esta vez, sin embargo, como tabla de membresía de un conjunto S arbitrario.

$x_i \in x_j$?	1	2	3	4	...	
1	1	0	0	1	1	...
2	0	1	0	1	1	...
3	1	1	1	0	1	...
4	0	0	0	0	1	...
...						
						???

La disposición sea, digamos, un diagrama de relaciones de membresía. Si vemos en el punto (*i, j*) un «0», esto indica que $x_i \notin x_j$; si vemos «1», esto significa $x_i \in x_j$.

Ahora bien, que sea S = $\{x_i | x_j \in x_i\}$. Éste es el complemento exacto, para así decir, del conjunto usual de Russell de todos los conjuntos que *no* son miembros de sí mismo: yo pienso de él como del conjunto de Russell *positivo*. Siempre que haya un «1» en un punto (*i, j*) a lo largo de la diagonal, esto significa que $x_i \in$ S. En cierto sentido, S «viene antes» del conjunto de Russell, puesto que no hay ningún uso de negación en su definición.

¿Es S = x_j para algún *j*? Bueno, aquí hay una dificultad. Ya que $x_j \in x_j$ si y sólo si $x_j \in$ S. Pero $x_j \in$ S si y sólo si $x_j \in x_j$. Estamos atrapados, entonces, en un círculo de la forma «es lo que es». Esto no se puede implementar.

Se aplica aquí una manera de pensar que aparentemente no tiene problemas, pero se hace uso de dos diferentes maneras de pensar sobre S. A primera vista están cubiertas, justo como en la forma usual de la paradoja de Russell, pero allí están, y se pueden separar, a saber, está ahí el pensar de S como un objeto o elemento que es un miembro de otro conjunto, y el pensar de S como un concepto, o como una condición definitoria.

Nos la vemos aquí con lo que se podría ver —siguiendo a Turing y Wittgenstein— una forma de regla performativa o vacía. Se te dice que debes hacer algo, dependiendo de lo que la regla te dice que hagas, no puedes hacer nada, sin embargo, porque entras en un bucle o un círculo tautológico. Esta pregunta sobre la membresía a un conjunto no puede ser una pregunta en la lista que puedes aplicar, puesto que no puedes aplicar las condiciones definitorias del conjunto en cada punto. (Una línea de razonamiento análogo se puede aplicar, e.g., a «autológico» en la paradoja de Grelling. Sin negación, no se puede obtener una contradicción, pero se puede generar una pregunta que sensatamente puede ser contestada sensatamente con una pregunta cerrada, de sí o no, es decir, con una pregunta que es incontestable *en este sentido.*)

¿El argumento positivo de Russell es «constructivo»? En un sentido, sí. No es forzoso verlo como aplicable a objetos infinitos reales y como nombrándolos directamente, ni como invocando ningun axioma de la teoría de conjuntos implicando lo infinito, aunque, desde luego, podría hacerlo[52]. En este otro sentido, entonces, no. Su resultado es que hay una carencia esencial de uniformidad en señalar la noción de una regla que se puede aplicar. No hace ningún uso de una negación en la regla misma. Lo que es constructivo aquí en esencia es la implicación: *si* anotas la lista como una totalidad, *entonces* podrás formular una nueva regla. Y *esta regla* resultará en una pregunta que no se puede contestar sin más, es decir, *esta* regla no se podrá aplicar en el mismo sentido.

El argumento positivo de Russell se refiere a un contexto extensional, el de los conjuntos. Hay, sin embargo, un aspecto creativo, «positivo» del argumento que emerge de la misma manera como lo hace en los argumentos sin cursor de Turing y de Wittgenstein. Uno debe darse cuenta de algo o ver algo que *no* le orienta (a nadie) a una cosa en particular, ni afirma que alguna solución en particular exista —en lugar der verse obligado a admitir la existencia de algo. El argumento diagonal de Cantor se presenta frecuentemente haciendo esto último, pero no lo anterior. Como las

[52] S es vacía por el axioma de fundación. Quine trabajó con *Urelemente* de la forma x={x], conjuntos cuyos únicos miembros son ellos mismos. (Quine (1937), reimpreso en Quine (1953, 1980).

demostraciones de Turing y Wittgenstein dejan en claro, sin embargo, la argumentación de Cantor provee de hecho los materiales para más de un solo tipo de argumento. Es este el punto de Wittgenstein, sugiero, al escribir en la observación de 1947, citada arriba, de que Cantor hizo dos cosas diferentes. Con esto no estoy negando que el argumento de Wittgenstein sea insuficiente para el propósito más amplio de Cantor, justo como lo es el de Turing, y por la misma razón. Estas «variantes» tardíos del argumento de Cantor son demostraciones con y sobre reglas que usan y aplican totalidades infinitas reales. Podemos distinguir, sin embargo, la argumentación de Cantor de su demostración y de sus aplicaciones, y tomar lo que Turing y Wittgenstein hacen como «variantes» de lo que Cantor hizo.

§ 5. Interpretando a Wittgenstein

Las demostraciones «sin cursor» que yo he estado viendo son cotidianas en el sentido que gustó a Wittgenstein y Turing: el «enredo» presente en la idea de una lista exhaustiva de reglas es denunciado en forma de una receta para una regla adicional, y el argumento diagonal es concebido como una especie de proceso de conceptualización que genera un nuevo tipo de regla. El razonamiento se presenta además, en ambos casos, de una manera no enredada con ninguna expresión de un formalismo particular. Esto no quiere decir, desde luego, que los argumentos no sean formalizables: ciertamente apelan, según Turing nos enseñó, a un sistema formal de cierto tipo. Y una máquina de Turing bien puede ser concebida como un sistema formal, sus actividades siendo codificables en un sistema de ecuaciones, por ejemplo. Pero si las máquinas de Turing no están enredadas de alguna manera con un sistema formal específico, también ofrecen un análisis de la noción misma de un sistema formal. Esto les permite dar sentido de manera general al rango de aplicación del teorema de incompletud, justo como se percató Gödel[53].

Los argumentos de Turing y Wittgenstein desde comandos sin cursor *evidentemente* le dan la vuelta a los argumentos sobre la aplicación de la ley del tercero excluido en contextos infinitos, algo que otros argumentos diagonales no hacen. En este sentido hacen desaparecer la lógica (la cuestión de una elección de lógica). Espero, sin embargo, que mi reconstrucción del argumento diagonal de

[53] En una nota adicionada en 1963 a una reimpresión de su ensayo famoso sobre la incompletud de 1931, Gödel llamó el análisis de Turing «una definición precisa e incuestionable de la noción general de un sistema formal», que permite la demostración de su teorema en una «versión completamente general». Véase Gödel (1986, p. 195). Sobre el tema de la «libertad de formalismo» con relación a Gödel, véase Kennedy (sin publicar). Compare la nota de pie 39.

Wittgenstein avance algo en la direccion de dar respuesta a la sensación que algunos lectores podrían haber tenido, a saber, de que Wittgenstein vea a la demostración de Cantor como privada de todo contenido deductivo en absoluto. Se ha afirmado que Wittgenstein leyó a Cantor como meramente proveyendo una imagen o una pieza de matemática aplicada que advierte contra esfuerzos innecesarios de anotar todos los números reales (Hodges, 1998). Es verdad, ciertamente, que los argumentos de Turing y de Wittgenstein piden que concibamos a las funciones como presentadas a través de una colección de comandos, reglas, directrices, de una manera *intensional*. Pero ellos dejan abierto cuál es el sentido de esta noción, o de la noción de una regla, que tienen en mente (i.e., los dígitos de 0 y 1 son una mera *façon de parler* por la manera en que presenté aquí a los argumentos). Se implica una crítica de la idea de que la actitud extensionalista es la *única* actitud, aunque, según he argumentado, de esto no se sigue ninguna refutación del extensionalismo, de la demostración diagonal de Cantor ni de la teoría de conjuntos.

Las observaciones de Wittgenstein que critican el extensionalismo como punto de vista exclusivo son bien conocidas, desde luego. Al igual que sus sugerencias de leer enunciados matemáticos como órdenes. Me parece, sin embargo, —aunque no presentaré argumentos aquí— que si tomamos en serio el argumento diagonal de Wittgenstein, si lo tomamos en un sentido literal, deberíamos cuestionar la idea de que él es o bien dogmático o bien escéptico acerca de la noción de seguir una regla y del punto de vista «intensional» — a menos que uno quiera decir que la noción de una regla y de seguir una regla en general son algo que se debería entender de manera *uniforme* en términos de una especie particular de hecho o de comprensión intuitiva. Ni Wittgenstein, ni Turing creían eso. El argumento diagonal de Wittgenstein, en vez de esto, sirve para cuestionar formas de constructivismo que entienden la noción de seguir una regla como clara o uniforme. (Espero discutir en otra ocasión las interpretaciones de Fogelin (1987), Kripke y Wright a la luz de los argumentos diagonales que he discutido aquí.) Su versión «cotidiana» del argumento a partir de la máquina sin cursor, aún más que la de Turing, hace visible que hay una manera de llevar a cabo la argumentación de Cantor que implica y se aplica a una apelación «cotidiana» a nuestro sentido de nuestras actividades comunes cuando calculemos o sigamos reglas. En este sentido, la argumentacion se hace inteligible. Quisiéramos decir que es más profunda o más ampliamente antropomórfica e intensional que la de Turing. Esto, sin embargo, estaría equívoco. Nada de esto implica ninguna escala.

Me parece, entonces, que una de las cosas más importantes que se deberían aprender del argumento de Wittgenstein es, que la idea misma de un planteamiento «intensional» único no es tan claro de inmediato — no más de lo que lo es que las ideas de que la percepción, la comprensión y/o el pensamiento sean intensionales. La argumentación de «juego» de Wittgenstein no sólo tiene que ver con la noción de una regla, receta, representación o procedimiento viable, sino también una especie de comprensión de *nosotros*, es decir, aquellos que leen la demostración paso por paso: tenemos que *ver* que no podemos hacer nada con la regla que se formuló. No todas las reglas son similares, y a veces tenemos que *mirar y ver* cómo operar o utilizar una regla antes de apreciarla correctamente.

Este último punto es lo que Wittgenstein subrayó justo antes de las observaciones de 1947 que he discutido en este trabajo. Él escribió

> Que *calculemos* con ciertos conceptos y con otros no, meramente muestra de qué tan diferentes son las herramientas conceptuales en su clase (que poco motivo tenemos para jamás suponer aquí ninguna uniformidad) (RPP I § 1095; cf. Z § 347)

Uno de los temas más importantes en la filosofía tardía de Wittgenstein arranca justo de este punto. La dificultad en la gramática del verbo «ver» (o: «de seguir una regla») no es tanto una cuestión de desacuerdo (sobre una etapa en particular, o sobre una manera de hablar sobre *todas* las etapas), sino en lugar de esto más bien que que frecuentemente obtenemos lo que llamamos «acuerdo» *demasiado* rápido, demasiado fácil. Y entonces estamos inclinados demasiado rápido a pensar que comprendemos lo que se significa con (lo que concebimos como) «acuerdo» y «desacuerdo» (o «regla de computación»). El quietismo es una cosa, EL aparente acuerdo carente de claridad es otra. Un acuerdo aparente bien puede esconder y encubrir la misma base y naturaleza del acuerdo mismo, y un acuerdo bien puede resultar estar descansar sobre un malentendido acerca de lo compartimos. Justo como podemos hacer que alguien esté de acuerdo demasiado rápido en aceptar que «sí, desde luego, la forma y los colores son parte de lo que veo», podemos hacer que alguien esté de acuerdo demasiado rápido en que «sí, desde luego no es posible hacer una lista de todos los números reales» (Cf. RPP I § 1107). La dificultad no es, en semejante caso, decidir por razones generales si revisar los principios de la lógica, o no, o si resolver un argumento favoreciendo el lado sí o no, e.g., a favor de Hilbert o de Brouwer. La dificultad es está en probar en donde descansa o no descansa el acuerdo, trazando límites conceptuales de una manera nueva y prestando atención a los detalles de la demostración. Los argumentos de Wittgenstein y Turing, tal como los presenté aquí, no son ni revisionistas ni anti–revisionistas de una manera universal. Lo que hacen es cambiar nuestra comprensión acerca de lo que semejantes posiciones universales nos ofrecen y lo que no[54].

AGRADECIMIENTOS

Debo dar gracias a Per Martin–Löf y a los organizadores del Colegio Sueco para Estudios Avanzados (SCAS) en honor a él en Uppsala, mayo de 2009. Los asistentes, en particular los editores del presente volumen, crearon una ocasión estimulante sin la cual este ensayo no hubiera sido escrito. Goran Sundholm, Soren Stenlund, Anders Oberg, Wilfried Sieg, Kim Solin, Simo Saarela y Gisela Bengtsson hicieron allá observaciones muy útiles. Mi comprensión de la importancia del argumento diagonal de Wittgenstein se reforzó durante mi estancia como miembro en 2009–2010 en el Lichtenberg–Kolleg, Georg August Universität Göttingen, en particular en conversaciones con Felix Mühlhölzer y Akihiro Kanamori. Wolfgang Kienzler ofreció comentarios útiles antes y durante mi presentación de algunas de estas ideas en el Collegium Philosophicum, Friedrich Schiller Universität, Jena, en Abril de 2010. El borrador final mejoró mucho a la luz de los comentarios que proveyeron Sten Lindstrom, Soren Stenlund and William Tait.

[54] Este artículo fue publicado previamente en inglés, con excepción de los apuntes introductorios, en P. Dybjer et al. (eds.), *Epistemology versus Ontology, Logic, Epistemology, and the Unity of Science* 27, DOI 10.1007/978-94-007-4435-6_2, © Springer Science+Business Media Dordrecht 2012 y su re–publicación y traducción al castellano fue autorizado con el amable permiso de la editorial.

REFERENCES

CHURCH, Alonzo (1936). "An unsolvable problem of elementary number theory". *American Joumal of Mathematics*, vol. 58, no. 2: 345–363. DOI: 10.2307/2371045

COPELAND, Brian J. (ed.). (2004). *The Essential Turing: The ideas that gave birth to the computer age*. Oxford: Clarendon Press.

DREBEN, Burton, y Juliet Floyd (1991). "Tautology: How not to use a word". *Synthese* vol. 87, no. 1: pp. 23–50. DOI: 10.1007/BF00485329

FLOYD, Juliet (2001). Prose versus proof: "Wittgenstein on Gödel, Tarski and Truth". *Philosophia Mathematica*, vol. 9, no. 3: pp. 901–928. DOI: 10.1093/philmat/9.3.280

FOGELIN, Robert J. (1987). *Wittgenstein*. London/New York: Routledge & K. Paul.

GANDY, Robin O. (1988). "The confluence of ideas in 1936". In: *The universal Turing machine: A halfcentury survey*, ed. R. Herken, pp. 55–112. New York: Oxford University Press.

GEFWERT, Christoffer (1998). *Wittgenstein on mathematics, minds and mental machines*. Burlington: Ashgate Publishing.

GÖDEL, Kurt (1986). *Kurt Gödel collected works. Volume I: Publications 1929–1936*. New York: Oxford University Press.

GÖDEL, Kurt (1990). *Kurt Gödel collected works. Volume II: Publications 1938–1974*. New York: Oxford University Press.

HODGES, Andrew (1983). *Alan Turing the enigma of intelligence*. New York: Touchstone.

HODGES, Wilfrid (1998). "An editor recalls some hopeless papers". *Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 4, no. 1 : pp. 1–16. DOI: 10.2307/421003

KENNEDY, Juliette (unpublished). *Gödel's quest for decidability: The method of formal systems; The method of informal rigor*.

KREISEL, Georg (1950). "Note on arithmetic models for consistent formulae of the predicate calculus". *Fundamenta Mathematicae* 37: pp. 265–285. DOI: 10.4064/fm-37-1-265-285

KRIPKE, Saul A. (1982). *Wittgenstein on rules and private language: An elementary exposition*. Cambridge: Harvard University Press.

MARION, Mathieu (2011). "Wittgenstein on the surveyability of proofs". In *The Oxford handbook to Wittgenstein*, ed. M. McGinn. New York/Oxford: Oxford University Press. DOI: 10.1093/oxfordhb/9780199287505.003.0008

MARTIN–LÖF, Per (1984). *Intuitionistic type theory*. Napoli: Bibliopolis.

MARTIN–LÖF, Per (1996). "On the meanings of the logical constants and the justifications of the logical laws". *Nordic Journal of Philosophical Logic*, vol. 1 no.

1: pp. 11–60.

MCGUINNESS, Brian (ed.). (2008). *Wittgenstein in Cambridge: Letters and documents, 1911–1951*. Malden/Oxford: Blackwell. DOI: 10.1002/9781444301243

MÜHLHÖLZER, Felix (2010). *Braucht die Mathematik eine Grundlegung? Ein Kommentar des Teils Ill von Wittgensteins Bemerkungen iiber die Grundlagen der Mathematik*. Frankfurt am Main: Vittorio Klostermann.

PETZOLD, Charles (2008). *The annotated Turing: A guided tour through Alan Turing's historic paper on computability and the Turing machine*. Indianapolis: Wiley Publishing, Inc.

QUINE, Willard V. (1937). "New foundations for mathematical logic". *American Mathematical Monthly* 44: pp. 70–80. DOI: 10.1080/00029890.1937.11987928

QUINE, Willard V. (1953, 1980). *From a logical point of view*. Cambridge: Harvard University Press.

SHANKER, Stuart G. (1987). "Wittgenstein versus Turing on the nature of Church's thesis". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 28, no. 4: pp. 615–649. DOI: 10.1305/ndjfl/1093637650

SHANKER, Stuart G. (1998). *Wittgenstein's remarks on the foundations of AI*. New York: Routledge.

SIEG, Wilfried (1994). "Mechanical procedures and mathematical experience". In *Mathematics and mind*, ed. A. George, 91–117. New York/Oxford: Oxford University Press.

SIEG, Wilfried (2006a). "Gödel on computability". *Philosophia Mathematica*, vol. 14, no. 2: pp. 189–207. DOI: 10.1093/philmat/nkj005

SIEG, Wilfried (2006b). "Step by recursive step: Church's analysis of effective calculability". In *Church's thesis after 70 years*, ed. A. Olszewski, J. Wolenski and R. Janusz, pp. 456–485. Frankfurt/Paris/Ebikon/Lancaster/New Brunswick: Ontos Verlag.

SIEG, Wilfried (2008). "On computability". In *Handbook of the philosophy of science: Philosophy of mathematics*, ed. A. Irvine pp. 535-630. Amsterdam: Elsevier BY. DOI: 10.1016/B978-0-444-51555-1.50017-1

STENIUS, Erik (1970). "Semantic antinomies and the theory of well–formed rules". *Theoria*, vol. 36, no. 2: pp. 142–160. DOI: 10.1111/j.1755-2567.1970.tb00416.x

TURING, A.M. (1937a). "On calculable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem". *Proceedings of the London Mathematical Society* vol. s2–42, no. 1: pp. 230–265. DOI: 10.1112/plms/s2-42.1.230

TURING, A.M. (1937b). "On calculable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. A correction". *Proceedings of the London Mathematical*

Society vol. s2-43, no. 1: pp. 544–546. DOI: 10.1112/plms/s2-43.6.544

TURING, A.M. (1937c). *Letter to Ethel Sarah Turing*. Cambridge, U.K.: King's College Archives, K/1/54, February **11,** 1937.

TURING, A.M. (1937d). *Correspondence with Paul Bernays*. Zürich: Eidgenossische Technische Hochschule Zürich/Swiss Federal Institute of Technology Zürich, Bibliothek.

TURING, A.M. (1950). "Computing machinery and intelligence". *Mind*, vol. 59, no. 236: pp. 433–460. DOI: 10.1093/mind/LIX.236.433

TURING, A.M. (1954). "Solvable and unsolvable problems". *Science News*, vol. 20, no. 31: pp. 7–23.

WATSON, A.G.D. (1938). "Mathematics and its foundations". *Mind*, vol. 47, no. 188: pp. 440–451. DOI: 10.1093/mind/XLVII.188.440

WEBB, Judson C. (1990) "Remark 3, introductory note to Gödel (1972a)". In Kurt Gödel *collected works. Volume II: Publications 1938–1974*, eds. S. Feferman, et al., pp. 281–304. New York: Oxford University Press.

WITTGENSTEIN, Ludwig (1970). *Zettel* [Z]. Berkeley: University of California Press.

WITTGENSTEIN, Ludwig (1978). *Remarks on the foundations of mathematics*. Cambridge: MIT Press.

WITTGENSTEIN, Ludwig (1980). *Wittgenstein's lectures*, Cambridge 1930–32, from the notes of John King and Desmond Lee [DL]. Oxford: Blackwell.

WITTGENSTEIN, Ludwig (1999). *The published works of Ludwig Wittgenstein* [CD–Rom], Charlottesville, VA/Oxford: Intelex Corporation. Oxford University Press.

WITTGENSTEIN, Ludwig (2004). Ludwig Wittgenstein: Briefwechsel [CD–Rom, Innsbrucker elektronische Ausgabe], ed. M. Seekircher, B. McGuinness, A. Unterkircher, A. Janik and W. Methlagl. Charlottesville, VA: Intelex Corporation.

WITTGENSTEIN, Ludwig, and G.H.Y. Wright et al. (1980). *Remarks on the philosophy of psychology, vol. **1***[RPP I]. Chicago/Oxford: University of Chicago Press/B. Blackwell.

WITTGENSTEIN, Ludwig (1989). *Wittgenstein's lectures on the foundations of mathematics: Cambridge, 1939*, ed. C. Diamond. Chicago: University of Chicago Press. Wright, C. (2001). *Rails to infinity: Essays on themes from Wittgenstein's philosophical investigations*. Cambridge: Harvard University Press. DOI: 10.7208/chicago/9780226308609.001.0001

Wittgenstein's Diagonal Argument: A Variation on Cantor and Turing

Turing was a philosopher of logic and mathematics, as well as a mathematician. His work throughout his life owed much to the Cambridge *milieu* in which he was educated and to which he returned throughout his life. A rich and distinctive tradition discussing how the notion of "common sense" relates to the foundations of logic was being developed during Turing's undergraduate days, most intensively by Wittgenstein, whose exchanges with Russell, Ramsey, Sraffa, Hardy, Littlewood and others formed part of the backdrop which shaped Turing's work. Beginning with a Moral Sciences Club talk in 1933, Turing developed an "anthropological" approach to the foundations of logic, influenced by Wittgenstein, in which "common sense" plays a foundational role. This may be seen not only in "On Computable Numbers" (1936/7) and Turing's dissertation (written 1938, see (1939)), but in his exchanges with Wittgenstein in 1939 and in two later papers, "The Reform of Mathematical Phraseology and Notation" (1944/5) and "Solvable and Unsolvable Problems" (1954).

Keywords: Common Sense · Formal System · Turing Machine · Ordinary Language · Philosophical Discussion.

El argumento diagonal de Wittgenstein: una variación sobre Cantor y Turing

Turing era un filósofo de la lógica y matemática, y también era un matemático. Su trabajo a lo largo de toda su vida estaba muy en deuda con el ambiente de Cambridge en que fue educado y al cual volvió toda su vida. Se desarrolló una tradición rica y distintiva de la noción como el "sentido común" se relaciona con los fundamentos de la lógica durante los días de estudiante de Turing, de manera sumamente intensiva por Wittgenstein. Los intercambios de éste con Russell, Ramsey, Sraffa, Hardy, Littlewood y otros era parte del trasfondo que moldeó el trabajo de Turing. A partir de un discurso en el *Moral Sciences Club* in 1933, Turing desarrolló un planteamiento "antropológico" a la fundación de la lógica, influenciado por Wittgenstein, en el cual el "sentido común" juega un papel fundacional. Esto se puede no sólo en "On Computable Numbers" (1936/1937) y la disertación de Turing (redactada en 1938, véase (1939)), sino en sus intercambios con Wittgenstein en 1939 y en dos trabajos posterioes, "The Reform of Mathematical Phraseology and Notation" (1944/1945) y "Solvable and Unsolvable Problems" (1954).

Palabras Clave: Sentido Común · Sistemas Formales · Máquina de Turing · Lenguaje Común · Discusión Filosófica.

JULIET FLOYD began her career in 1990 teaching at the City College of New York and CUNY (1992), where she became the assistant executive director of the graduate program. She moved to Boston University in 1995 as Visiting Assistant Professor, joining the Philosophy Department there as Associate Professor the following year. She is Professor of Philosophy in Boston since 2006. After obtaining a Philosophy B.A. at Wellesley College with Highest Honors and studying at the London School of Economics and Political Science (1978–1982), she earned her Philosophy MA ("Kant's *Sensus Communis*: Regulative and Constitutive", 1984) and PhD ("The Rule of the Mathematical: Wittgenstein's Later Discussions", 1990) at Harvard University. Her research revolves, among other topics, around the History and Development of Analytic and Twentieth

Century Philosophy, Philosophy of Logic and Mathematics, Philosophy of Language, Formal and Traditional Epistemology, Theories of Truth, Modern Philosophy (Kant), Aesthetics, Wittgenstein, Pragmatism, History and Philosophy of Science, especially Logic and Mathematics and Philosophy of Emerging Computational Technologies. She was awarded numerous Fellowships and Major Grants. She edited together with S. Shieh the book *Future Pasts: Perspectives on the Place of the Analytic Tradition in Twentieth–Century Philosophy* (Oxford University Press, 2001), together with J. E. Katz *Philosophy of Emerging Media: Understanding, Appreciation, Application* (Oxford University Press, 2016), and with A. Bokulich *Philosophical Explorations of the Legacy of Alan Turing – Turing 100*, Boston Studies in the Philosophy and History of Science Vol. 324 (Springer Verlag, 2017). She contributed with chapters to more than fifty books and published numerous articles in a wide variety of philosophical Journals.

INFORMACIÓN DE CONTACTO | CONTACT INFORMATION: Department of Philosophy, Boston University, 745 Commonwealth Avenue # 516, Boston, MA 02215 United States of America. e–mail (✉): r jfloyd@bu.edu

KURT WISCHIN is currently CPhil at the University of Granada, Spain. He got in touch with philosophy first at the University of Vienna in the 1970s, obtained a BA in Philosophy from the University of Queretaro, Mexico and an MPhil at the National Autonomous University of Mexico, Mexico. His main interest centres in Philosophy of Language and early Analytical Philosophy, in particular, Frege and Wittgenstein. He has published articles and translations in some anthologies and academic reviews.

INFORMACIÓN DE CONTACTO | CONTACT INFORMATION: Departamento de Filosofía I, Campus Cartuja, s/n, 18071, Universidad de Granada, Granada, España. e–mail (✉): kurt.wischin@gmail.com

HISTORIA DEL ARTÍCULO | ARTICLE HISTORY

Received: *20-December–2018*; Accepted: *3–April–2019*; Published Online: *30-June–2019*

COMO CITAR ESTE ARTÍCULO | HOW TO CITE THIS ARTICLE

Floyd, Juliet (2019). «Wittgenstein's Diagonal Argument: A Variation on Cantor and Turing / El argumento diagonal de Wittgenstein: una variación sobre Cantor y Turing». *Disputatio. Philosophical Research Bulletin* 8, no. 9: pp. 593–644.