Diagramas euclidianos e justificação matemática

TAMIRES DAL MAGRO

NESTE TRABALHO, APRESENTO UMA REVISÃO DA LITERATURA sobre o papel dos diagramas nas provas exibidas na geometria plana dos *Elementos* de Euclides. Nessa prática matemática, alguns passos das provas são justificados a partir das próprias figuras. A legitimidade desse procedimento na justificação matemática foi notoriamente questionada. No final do século XIX, uma concepção negativa sobre o emprego das figuras predominou: deveriam ser banidas pois seriam potencialmente enganosas, podendo levar a resultados falaciosos. Os *Elementos* não passaram ilesos, e Euclides foi declarado culpado:

> O apelo à intuição [entendida como o apelo a um diagrama particular] é uma fonte de perigo para o geômetra. Ele é tentado a fazer assunções que são acidentalmente verdadeiras da figura particular que ele está tomando como uma ilustração [...]. Mostrou-se que Euclides mesmo foi culpado disso, e consequentemente que a presença da figura é essencial para algumas de suas provas. (Ayer, 1971 [1936], p. 83)[1]

Apresento nas próximas seções diferentes aspectos que contribuíram para a adoção de uma atitude negativa com respeito ao raciocínio diagramático na matemática, especificamente no caso dos *Elementos.* Na seção 1, apresento um panorama dos problemas investigados dentro de três vertentes na filosofia da matemática nos últimos anos, situando a investigação sobre o raciocínio visual na geometria euclidiana dentro da corrente da Filosofia da Prática Matemática. Na seção 2, mostro alguns dos fatores relevantes dentro da história e filosofia da matemática que motivaram diversas críticas ao uso de diagramas em provas. Por

[1] Todas as citações, a menos que se indique o contrário, são traduções de seu idioma original ao português pela autora deste trabalho.

T. dal Magro (✉)
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Brasil
e-mail: tamiresdma@gmail.com

Disputatio. Philosophical Research Bulletin
Vol. 9, No. 14, Sept. 2020, pp. 73–102
ISSN: 2254–0601 | [PT] | **ARTÍCULO**

fim (seção 3), discuto como essas críticas vêm sendo recentemente reavaliadas e a legitimidade do uso dos diagramas nas provas euclidianas reivindicada.

§1. Formalistas, *mavericks* e a emergência da Filosofia da Prática Matemática

Ao final do século XIX e em boa parte do século XX, as investigações em Filosofia da Matemática se concentravam predominantemente em questões relacionadas aos compromissos ontológicos na matemática, a natureza dos objetos (supostamente) abstratos que a compõem e os meios epistêmicos que teríamos para acessá-los (problema discutido em dois artigos clássicos de Benacerraf (1965, 1973) que foram muito influentes em sua época (*cf.* Reck & Price, 2000). Estas questões foram a locomotiva principal desta área da filosofia por muitas décadas e guiam vários projetos de pesquisa e investigação contemporâneos (como é o caso de trabalhos recentes em neo-logicismo, nominalismo, estruturalismo, argumentos da indispensabilidade etc).[2]

Muitas das direções tomadas pelos filósofos pertencentes a essa escola foram elaboradas em conexão com o desenvolvimento de programas de fundação clássicos em matemática, em particular, o logicismo, o Programa de Hilbert e o intuicionismo.[3] Utilizando a metáfora arquitetônica de Ferreirós & Gray (2006, Introdução), a concepção fundacionista caracteriza a matemática como um edifício acabado, cujas fundações e certezas são sólidas e sustentam, fazendo a função de alicerce, tudo aquilo que é construído sobre elas. A tendência de grande parte das investigações foi, a partir do enfoque em lógica e teoria dos conjuntos, identificar as fundações de todo o edifício. Como bem resume Ferreirós,

> Já que a filosofia da matemática do século XX foi profundamente impactada por programas de fundação, a maneira tradicional de conceber o seu corpus de problemas foi através de diferentes formas de reconstruir logicamente uma teoria matemática, com ênfase especial em teorias axiomáticas e sistemas formais. Uma abordagem tradicional, por exemplo, a teoria dos conjuntos, se focaria em uma versão axiomática ou formalizada da teoria – como o sistema ZFC formulado em lógica de primeira ordem – e se perguntaria uma série de questões sobre sua ontologia e epistemologia (por exemplo, como é possível

2 Para abordagens estruturalistas, *cf.* Shapiro (1997), Reskin (1997); para uma apresentação e discussão crítica do nominalismo, *cf.* Burgess & Rosen (1997); sobre o argumento da indispensabilidade, *cf.*, por exemplo, Colyvan (2001); para abordagens neo-logicistas, *cf.*, por exemplo, Hale &Wright (2001); sobre ficcionalismo, *cf.* Field (1981).

3 Para uma discussão das três principais correntes fundacionistas, *cf.* Shapiro (2000); Linnebo (2017).

> para nós conhecer a verdade de um axioma? O que é a justificação de um axioma? Ou, até que ponto tem sucesso uma análise conceitual particular, como a concepção iterativa de conjuntos, em motivar um sistema axiomático?). (2016, p. 23)

Não é um propósito aqui detalhar cada uma dessas abordagens[4], mas sim dirigir a atenção a uma consequência que é, em princípio, decorrente da restrição do foco a investigações sobre problemas fundacionais, a saber, pouca atenção foi direcionada às práticas matemáticas e ao seu papel no estudo filosófico da disciplina. Ferreirós salienta que muitos autores voltaram sua atenção para uma única teoria matemática que pudesse ser suficientemente ampla para abarcar todas as teorias matemáticas atuais. O sistema comumente aceito foi alguma forma da teoria de conjuntos axiomática baseada em lógica clássica.[5]

De acordo com Mancosu (2008, Introdução), essa ênfase em questões fundacionais engendrou uma concepção muito restrita da epistemologia da matemática. Uma abordagem 'formalista' (termo usado por Lakatos (1978)) tornou-se, em meados do século XX, a atitude filosófica predominante nos manuais clássicos e outros escritos em matemáticas.[6] Nessa abordagem, a matemática é definida como uma ciência de provas rigorosas, que, por sua vez, são definidas como uma sequência de fórmulas apresentadas em uma estrutura lógico-axiomática, tal que cada uma delas é ou um axioma ou se segue de fórmulas anteriores na sequência via regras de inferência. Em outras palavras, para os formalistas a matemática é a ciência das deduções formais, de axiomas a teoremas.[7] Ter uma estrutura dedutiva – de modo que um conjunto crescente de verdades imutáveis são deduzidas de axiomas e definições – é, portanto, tomado como uma das características fundamentais para uma certa atividade ser considerada matemática (o que Celucci, 2012, chama de 'concepção dedutivista' da matemática). Consequentemente, uma afirmação bastante frequente dentro dessa corrente é a de que o uso de figuras ou diagramas é

4 Sobre a chamada 'crise dos fundamentos' na matemática, *cf.* Ferreirós (2008) e a Introdução de Ferreirós & Gray (2006). Ver também a primeira parte dessa obra (pp. 45-156) para uma série de ensaios que lançam uma nova luz a desenvolvimentos e reflexões sobre fundamentos da matemática.

5 Segundo Ferreirós, as raízes dessa tradição (para além dos resultados de desenvolvimentos fundacionais) vêm também de uma antiga visão de Matemática como uma Teoria Ideal, fixa e estática, possuindo fundamentos unificados (2016, p. 4).

6 Alguns dos exemplos mais importantes do formalismo como estilo na exposição matemática foram os escritos do grupo conhecido como Bourbaki. Sob esse pseudônimo, uma série de textos básicos em Teoria dos Conjuntos, Álgebra e Análise Matemática foi produzida, que tiveram uma grande influência nos anos 1950 e 1960 (*cf.* Bourbaki, 1949).

7 *Cf.* Davis and Hersh (1980), cap. 7; Robinson, A. (1969); Curry (1958).

inapropriado como ferramenta de raciocínio ou como base de inferências matemáticas (na seção 2 trataremos desse tópico). Além disso, algumas questões sobre os componentes de um sistema formal são consideradas como pré-matemáticas e, portanto não interessantes dentro da Filosofia da Matemática. Alguns exemplos são: por que optar por usar uma dada definição e não outra? Porque aqueles axiomas e não outros?[8]

A investigação das estruturas lógico-formais subjacentes às teorias matemáticas, portanto, tornou-se em grande medida o único tópico de investigação, enquanto outros aspectos epistemológicos relevantes da matemática foram deixados em segundo plano. Dentre eles, questões sobre fecundidade, visualização, raciocínio diagramático, evidência, explicação e entendimento. Mancosu (2008) observa que,

> [a filosofia das ciências naturais] floresceu sob a influência combinada de metodologia geral e questões metafísicas clássicas (realismo vs. anti-realismo, espaço, tempo, causação, etc.) interagindo com estudos de casos detalhados nas ciências especiais (física, biologia, química, etc.). Estudos de casos reveladores foram tanto históricos (estudos da relatividade de Einstein, a teoria eletromagnética de Maxwell, mecânica estatística etc.) como contemporâneos (investigações das fronteiras da teoria quântica de campos etc.) Em contraste, com poucas exceções, a filosofia da matemática tem se desenvolvido sem o correspondente estudo de casos detalhados. (p. 2)

Certos problemas filosóficos só se tornam salientes quando a área apropriada das matemáticas é levada em consideração. Para isso, argumenta o autor (2008, p. 2), a atenção à prática matemática é condição necessária.

Lakatos (1978)[9] foi um dos pioneiros em apresentar uma visão crítica ao foco unilateral a questões fundacionais dentro da Filosofia da Matemática. O autor apresenta reservas quanto à identificação da noção de demonstração matemática com sua capacidade de ser formalmente axiomatizável, afirmando que essa tradição «desliga a história da matemática da filosofia da matemática» (p. 13) e, em uma passagem famosa diz, remetendo-se a Kant, que «a história da matemática, à falta da orientação da filosofia, tornou-se cega, ao passo que a

8 A segunda questão foi tema de investigação de Maddy (1990, 1997) em teoria dos conjuntos, a qual é considerada uma das pioneiras da Filosofia das práticas matemáticas. Seu trabalho se ocupa de questões concernentes a história e prática dessa área, considerando, por exemplo, as discussões de teóricos dos conjuntos sobre qual critério deveria ser usado para adotar ou não princípios tais como a Hipótese do Contínuo.

9 As citações de Lakatos (1978) são extraídas da tradução da obra ao português indicada nas referências bibliográficas.

filosofia da matemática, voltando as costas aos fenômenos mais curiosos da história da matemática, tornou-se vazia» (pp. 14-15). Lakatos argumenta que o formalismo acaba deixando de explorar problemas referentes «à matemática não-formal (*inhaltliche*) e ao seu progresso, e todos os problemas relacionados à lógica situacional da solução de problemas matemáticos» (p. 13). Todo o esforço do autor no restante dessa obra (*Provas e Refutações*) consiste em ilustrar como esse diagnóstico poderia ser remediado, tratando de problemas relacionados à metodologia da matemática ('metodologia' aqui utilizada com um significado análogo à heurística ou lógica do descobrimento). O estudo de caso ao qual se volta o autor diz respeito ao desenvolvimento histórico da fórmula de Euler para poliedros ($V - A + F = 2$, 'V' denotando o número de vértices, 'A' o número de arestas e 'F' o número de faces de um dado poliedro). Vários contraexemplos são apresentados para a fórmula inicial, levando à modificação da definição do próprio conceito de poliedro – já que a fórmula vale para alguns tipos de poliedros, mas não para todos. Desse estudo, Lakatos extrai a lição de que a metodologia da matemática é mais semelhante à das ciências naturais do que parece à primeira vista, e que um dos tópicos centrais que deveria ser discutido é quais são os tipos de enunciados que poderiam ser considerados como potencialmente falsificadores de teorias axiomáticas. Lakatos chama essa concepção de 'quasi-empirismo', opondo-se ao dedutivismo em matemática e, afastando-se de uma abordagem apriorista, defende que a matemática se constrói a partir de conjecturas. A abordagem de Lakatos focou na «"dialética" das conjecturas, tentativas de provas, contraexemplos, conceitos refinados, e novas provas» (Ferreirós & Gray, 2006, p. 17).

As considerações de Lakatos influenciaram um movimento dentro da filosofia da matemática com um espírito anti-fundacionista, cujos membros foram chamados, seguindo a terminologia de Kitcher, de *mavericks* (Aspray and Kitcher, 1988).[10] Para os *mavericks*, a lógica matemática, que havia sido essencial no desenvolvimento de programas fundacionistas, era ineficaz para lidar com questões relacionadas a dinâmicas de descoberta matemática e a história da disciplina. A tradição *maverick* reage fortemente à Filosofia da Matemática identificada estritamente com a fundação da matemática. O que os membros dessa segunda tradição reivindicam é que a análise da matemática deve ser mais fiel ao seu desenvolvimento histórico. Deve tratar, por exemplo, de questões

[10] Obras posteriores a Lakatos onde se pode encontrar críticas a abordagens fundacionistas em Filosofia da Matemática são os ensaios presentes em *New Directions in the Philosophy of Mathematics* (Tymoczko, 1998 [1986]). No prefácio, Tymoczko escreve que uma das motivações dos contribuintes à obra é a de que eles «estavam frustrados pela inabilidade das formulações filosóficas tradicionais em articular a experiência real dos matemáticos» (p. ix).

sobre o crescimento do conhecimento matemático, o progresso e a explicação matemática. Sobre a filosofia da matemática que emerge dos programas fundacionais, Aspray & Kitcher afirmam:

> A Filosofia da Matemática parece ter se tornado um microcosmo para os mais gerais e centrais problemas em filosofia – problemas em epistemologia, metafísica, e filosofia da linguagem – e o estudo daquelas partes da matemática às quais filósofos das matemáticas mais frequentemente se dedicam (lógica, teoria do conjunto, aritmética) parece designado a testar os méritos das grandes concepções filosóficas sobre a existência de entidades abstratas ou a durabilidade de uma certa imagem do conhecimento humano. Não há nada errado com o engajamento em tais investigações, por mais que elas possam ser irrelevantes para as preocupações de matemáticos e historiadores da matemática. Ainda assim é pertinente perguntar se há ou não há outras tarefas para a filosofia da matemática, tarefas que emergem ou da prática matemática atual ou da história dessa disciplina. Um número pequeno de filósofos (incluindo um de nós) acredita que a resposta é sim. Apesar de grandes desacordos entre os membros desse grupo, proponentes da tradição minoritária compartilham a visão de que filosofia da matemática deve preocupar-se com os tipos de problemas de que se ocupam aqueles que estudam outros ramos do conhecimento humano (mais obviamente as ciências naturais). Filósofos deveriam colocar questões como: Como o conhecimento matemático cresce? O que é progresso matemático? O que torna algumas ideias (ou teorias) matemáticas melhores que outras? O que é explicação matemática? (1988, p.17)[11]

Kitcher é considerado uma figura importante dentro da tradição *maverick*. Em *The Nature of Mathematical Knowledge* (1984), o autor oferece uma abordagem historicista do crescimento do conhecimento matemático, com estudos sobre a metodologia no desenvolvimento da matemática e dos padrões de mudança entre práticas matemáticas. Kitcher é um dos primeiros a introduzir uma noção de prática matemática, entendida como um quíntuplo composto por uma linguagem, um conjunto de proposições aceitas, um conjunto de formas de raciocínio aceitas, um conjunto de questões selecionadas como relevantes e um conjunto de visões metamatemáticas. Um dos objetivos centrais de Kitcher foi dar conta da racionalidade nas transições entre práticas matemáticas. De acordo com o autor, as mudanças podem se dar por conta de alterações em um ou mais elementos do quíntuplo, gerando instabilidades nas antigas práticas – seja pela introdução de novos elementos na linguagem, ou de novas ferramentas de raciocínio, ou de novas questões. No entanto, argumenta o autor, tais transições seguem padrões racionais entre os quais estão generalização, aumento de rigor, sistematização. Sendo assim, questões

[11] Para perspectivas similares, provindas de matemáticos e historiadores, *cf.* Davis and Hersh (1980) e Kline (1980).

relacionadas ao progresso e racionalidade da matemática foram essenciais dentro da abordagem de Kitcher, a qual pretende oferecer uma reconstrução racional da matemática colocando o desenvolvimento histórico da disciplina no centro.[12]

Em linhas gerais, as principais características presentes na tradição *maverick* podem ser sintetizadas como: uma atitude anti-fundacionista, alegando que não há fundações certas para a matemática e que ela é falível; um anti-logicismo, ou seja, a ideia de que a lógica não pode fornecer as ferramentas adequadas para uma análise satisfatória da matemática e seu desenvolvimento; e, uma atenção à prática matemática, alegando que somente uma análise detalhada e reconstruções de grandes e significantes partes da prática matemática podem fornecer uma filosofia da matemática suficientemente abrangente (Mancosu, 2008, Introdução). Um traço importante, portanto, dentro das considerações e críticas levantadas por essa tradição, foi chamar atenção à elaboração de uma filosofia da matemática que fosse mais atenta ao desenvolvimento histórico da disciplina.

O intuito até aqui foi o de destacar alguns pontos relevantes no quadro geral da Filosofia da Matemática que foram preliminares à emergência da Filosofia da Prática Matemática, apresentando alguns exemplos de defensores dentro da tradição principal – fundacionista – onde se situam logicismo, intuicionismo e formalismo com preocupações ontológicas e epistemológicas sobre entidades matemáticas – e dos *mavericks*, sendo tipicamente anti-fundacionistas e voltados a questões sobre história, metodologia e padrões de mudança na matemática.[13] Como veremos a seguir, algumas considerações e reservas apresentadas pelos últimos levaram posteriormente vários autores a voltar uma particular atenção para a história e prática das matemáticas.[14]

[12] Em uma perspectiva similar a Lakatos e Kitcher, se situam as contribuições de Corfield (2003) sobre a filosofia do que ele chamou de 'matemática real", a qual deveria: «preocupar-se com o que os principais matemáticos de seu tempo alcançaram, como seus estilos de raciocínio evoluem, como eles justificam o curso ao longo do qual eles orientam seus programas, o que constitui obstáculos para seus programas, como eles chegam a ver um domínio de estudo como valiosos e como suas ideias dão forma e são formadas por preocupações de físicos e outros cientistas» (2003, p. 10). O autor compartilha também da visão crítica acerca da tradição fundacionista em Filosofia da Matemática, pois esta descarta como irrelevantes problemas mais prementes para uma filosofia da matemática 'real'.

[13] Como atenta Ferreirós (2016), embora houve algumas abordagens mistas – o autor cita Cavaillès na França e Bernays na Alemanha nos anos 1930 –, elas permaneceram relativamente não influentes na época.

[14] *Cf.*, por exemplo, Gillies, 1992; Cellucci, 2002; Krieger, 2003; Ferreirós and Gray, 2006; Mancosu, 2008; van Bendgen, 2014; Ferreirós, 2016; Ferreirós e Lassalle Casanave (eds), 2016. Um levantamento sobre

Com inspiração em Carter (2019), chamarei essa nova escola de conciliatória, a qual segue, como um princípio geral, o de que «não é somente saudável, mas necessário, evitar a excessiva sistematicidade e reducionismo que foram característicos de muita filosofia da ciência e epistemologia» (Ferreirós, 2016, p. 4). Embora grande parte de seus proponentes não compartilhem da forte rejeição dos *mavericks* a teorias fundacionistas, acreditam que a epistemologia da matemática precisa ser estendida para além da investigação das estruturas lógico-formais subjacentes às teorias matemáticas. Ressaltam que a consideração das práticas matemáticas e a história da disciplina previne que problemas pertinentes e frutíferos que possam emergir da análise dessas sejam desconsiderados. Como afirma Mancosu (2008), «ignorá-las tem empobrecido drasticamente a filosofia analítica da matemática» (p. 18). A perspectiva tomada por grande parte dos autores alinhados a essa vertente está bem capturada na apresentação de Ferreirós & Gray (2006):

> Hoje em dia poderíamos dizer que estamos em fase de transição. Após um período no qual abordagens fundacionistas e anti-fundacionistas disputaram para ocupar todo o espaço, chegamos no entendimento de que esta dicotomia era demasiado restritiva e, em última análise, equivocada: ir *além* dos estudos fundacionais de nenhum modo significa ir *contra* eles. Ao mesmo tempo questões vinculadas à prática matemática, as quais até certo ponto representaram o principal divisor entre as concepções alternativas, estão agora presentes em todas as agendas filosóficas. (p. 5)

Entre as características centrais da tradição conciliatória, encontra-se um modo mais aberto e interdisciplinar de perguntar e responder questões. Os problemas tradicionais sobre a natureza dos objetos matemáticos e a epistemologia das matemáticas não são ignorados, mas sim combinados com um estudo de uma grande variedade de problemas sobre como a matemática é feita, avaliada e aplicada em conexão com a história da disciplina, os agentes (comunidades) que a desenvolvem e questões cognitivas. São consideradas relevantes as investigações sobre, por exemplo, a conectividade da matemática (quando conceitos desenvolvidos em uma parte da matemática se conectam com conceitos aparentemente não relacionados em outras áreas), a compreensão das provas realizadas por computadores[15], o papel da analogia e raciocínios não-dedutivos e o papel que imagens e diagramas possuem na atividade

as motivações e os diferentes prospectos dentro da Filosofia da Prática Matemática encontra-se em Carter (2019).

[15] Para análises de provas por computadores, especialmente do Teorema das Quatro Cores *cf.* Tymoczko (1979), Secco (2016) e Secco & Pereira (2017).

matemática. Inspirados em Lakatos e Kitcher, muitos pesquisadores passaram a usar casos históricos de estudo para investigar determinadas questões, criando diversas inter-relações entre história e filosofia da matemática.

Sendo assim, a corrente conciliatória possui objetos de investigação variados, que são compatíveis com distintos projetos de investigação, metodologias e objetivos. Carter (2019) apresenta uma análise sistemática sobre as principais vertentes estabelecidas, bem como uma série de referências e exemplos paradigmáticos das análises que foram desenvolvidas nos últimos anos. A autora identifica três tipos de abordagens, as quais muitas vezes se justapõem: histórica, baseada em agentes e epistemológica. Elas diferem com respeito a, por exemplo, «quais aspectos da "prática" elas consideram e, portanto, em quais assunções estão baseadas, em quais são os objetivos da FPM [Filosofia da Prática Matemática], e em que métodos são trazidos para o estudo de suas questões» (p. 6).[16]

Na vertente histórica, 'prática matemática' refere-se às várias maneiras que a atividade se desenvolve, seja em um determinado período, seja em relação a como esses resultados têm sido estabelecidos ao longo do tempo. Discute-se como concepções filosóficas podem moldar a matemática e como o desenvolvimento da matemática em certo período pode dar origem a questões filosóficas. Como um exemplo, Carter cita os trabalhos de Tappenden (2006) sobre as motivações históricas do logicismo de Frege, no qual o autor defende a tese de que essas eram mais filosóficas do que propriamente matemáticas e discute quais eram as exigências de um maior rigor nas últimas – conectando os estudos de Frege com os trabalhos de Riemann sobre geometria, análise e sua

[16] Ferreirós (2016) é um exemplo de obra cuja análise do conhecimento matemático justapõe essas três categorias. O autor considera em sua abordagem que há vários níveis de conhecimentos e práticas matemáticas coexistentes historicamente, bem como suas interconexões e «destaca a origem do conhecimento matemático de tipos particulares de interconexões entre recursos cognitivos e práticas culturais, com os agentes no centro, tornando possíveis interações e desenvolvimentos de novas práticas» (p. 3). Com isso, enfatiza que uma análise epistemológica da matemática adequada deve levar em conta os seguintes aspectos: (1) o conhecimento matemático é produzido por comunidades tendo como bases suas habilidades biológicas e cognitivas (onde a última é mediada pela cultura); (2) deve considerar as raízes práticas das matemáticas (em práticas do dia-a-dia, práticas técnicas, práticas matemáticas elas mesmas e as práticas científicas); (3) deve analisar o desenvolvimento histórico da matemática. A partir da consideração do desenvolvimento histórico da disciplina e colocando o papel dos agentes ou comunidades matemáticas no centro da investigação, o autor busca responder a questões epistemológicas tradicionais, como a questão sobre a certeza na matemática. Sobre isso, em linhas muito gerais, a tese defendida pelo autor é a de que há um nível gradativo sobre a certeza na matemática, situando em níveis distintos as certezas básicas da aritmética – as quais são baseadas em atividades de contar – e as concepções (hipotéticas) da matemática avançada (*cf.* sobre isso, 2016, caps. 6 e 7).

interrelação. Estudos de casos históricos podem estar baseados em questões que possuem inclinações filosóficas, tais como em compreender como a noção de generalidade ou simplicidade podem ser concebidas. Nesse sentido, pode-se perguntar como uma dada noção foi entendida dentro de uma prática e que lições gerais se pode extrair dos casos de estudo particulares:

> Uma historiadora poderia estar interessada em documentar como uma noção tal como 'simplicidade' ou 'generalidade' foi entendida ou utilizada como diretriz de uma investigação em um período particular, comunidade, ou até mesmo por uma só matemática. A filósofa interessada em capturar uma noção particular poderia ocupar-se de como ela é entendida em diferentes contextos, com o intuito de incluir possíveis compreensões da mesma. (Carter, 2019, p. 14)

Na segunda vertente, parte-se da premissa de que a investigação filosófica da matemática deve levar em conta os agentes ou matemáticos que desenvolvem a atividade. Dois tipos de abordagens podem ser encontrados nesse âmbito, uma de cunho sociológico e outra de cunho pragmatista. Na primeira, situam-se trabalhos como o de Hersh (1979), no qual o autor defende a posição de que objetos matemáticos são uma variedade especial de objetos históricos e socio-culturais, direcionando suas investigações para campos de sociologia e educação matemática. Alguns dos pontos defendidos pelo autor são de que a matemática é um conhecimento humano e falível e que há diferentes versões de rigor na matemática, bem como de prova. Dentro desse *framework*, também são estudadas as crenças de matemáticos sobre o que é conhecimento matemático (Carter menciona o trabalho de Wilhelmus, 2007, onde há um estudo realizado a partir de questionários enviados a matemáticos com respeito ao que leva à aceitação da validade de um teorema e, a partir disso, mostra-se que fatores como a reputação do matemático ou a importância do teorema é influente nessa decisão).

Já uma análise pragmatista busca mostrar que, embora o conhecimento matemático seja produto de atividades humanas, não pode ser reduzido a convenções humanas, e rejeita que o conhecimento matemático possa ser estudado somente por métodos sociológicos. Argumenta-se que «pelo menos algumas partes da matemática não são arbitrárias e que, embora a matemática esteja às vezes baseada em convenções ou hipóteses, o conhecimento matemático ainda é objetivo» (Carter, 2019, p. 9). Essa vertente tem como um de seus fundadores Peirce, que caracterizou a matemática como um raciocínio onde se pode extrair conclusões necessárias a partir de hipóteses formuladas. Nesse sentido também está direcionada a contribuição de Ferreirós (2016), onde o autor defende, em linhas gerais, que a objetividade matemática não consiste em assumir a existência de um universo de objetos independentes aos quais as teorias matemáticas se referem, e nos quais baseiam as verdades matemáticas, mas sim no fato de que as teorias matemáticas nos forçam a aceitar os resultados de um modo que não podemos evitar sem que tenhamos que revisar fortemente axiomas ou princípios lógicos empregados.[17]

Entre as contribuições centrais do autor para o tema, está a tese de que há um gradiente entre as certezas básicas da matemática elementar (como a aritmética) e a introdução de hipóteses na matemática avançada (ver nota 14). Sobre as primeiras, o autor defende seu caráter não hipotético, mostrando que estão ligadas cognitivamente com outras práticas não matemáticas – como práticas técnicas de medir e contar:

> A concepção hipotética não implica que toda a matemática tenha o mesmo caráter. Poderíamos certamente argumentar que algumas partes do corpo teórico (como partes da geometria elementar, por exemplo) gozam de um status não-hipotético especial. Um candidato óbvio à certeza é a teoria dos números naturais, exemplificada nos axiomas de primeira-ordem de Peano-Dedekind, quando apresentada de maneira a evitar comprometimento com infinito atual; poderíamos argumentar que os axiomas de Peano-Dedekind são verdadeiros dos *counting numbers* (*cf.* Capítulo 7). Isto significa que podemos evitar apriorismos até mesmo aqui, adotando um argumento alinhado à abordagem cognitiva, histórica, pragmatista que estamos propondo (p. 156).

Sobre as segundas, a certeza que se pode obter delas possui um caráter hipotético, elas formam parte constitutiva de sistemas matemáticos e são verdadeiras dentro desses sistemas – mas podem não ser fora deles (ver nota 15). No entanto, defende o autor – a partir do estudo de diversos casos históricos – que, embora possa ocorrer a introdução, rejeição ou formulação de

[17] O autor chama atenção, por exemplo, para o fato de que alguns Teoremas (que dependem da aceitação do Postulado das Paralelas) são verdadeiros na geometria apresentada nos *Elementos* mas não em outras geometrias (como a geometria de Riemman, onde tal Postulado não é assumido). Alguém que aceita os princípios da prática euclidiana, incluído entre eles o postulado das paralelas, é forçado a aceitar as 48 proposições, entre elas, o Teorema I.29 (no qual Euclides prova que a reta que incide sobre retas paralelas forma dois ângulos alternos iguais entre si e o ângulo externo igual ao interno e oposto, e os ângulos internos do mesmo lado iguais a dois retos). Já em geometrias não-euclidianas, como a de Lobachevsky, que não aceitam tal postulado, essa proposição não é válida. Outro exemplo interessante que o autor menciona é o do Teorema da não-enumerabilidade do conjunto dos números reais de Cantor. Esse é um resultado objetivo no sentido defendido pelo autor, já que, aceitando o conjunto de números reais e naturais, somos forçados a aceitar esse resultado. No entanto, alguém poderia não aceitá-lo – como é o caso de Brouwer – através da rejeição de axiomas das matemáticas modernas e alguns de seus princípios lógicos.

novas hipóteses matemáticas, não são feitas de maneira arbitrária, mas fortemente restringidas a partir de resultados matemáticos prévios e sua integração ou interconexão com outras práticas matemáticas. Entre os exemplos discutidos, está o do Axioma da Escolha em teoria dos conjuntos, em que o autor mostra que optar pela aceitação ou rejeição desse princípio traz consequências para outras áreas da matemática como, por exemplo, a Análise.

É comum na vertente pragmatista considerar estudos empíricos provindos das ciências cognitivas sobre como algumas características da cognição humana básica podem estar entre as raízes da formação de certos conceitos ou teorias matemáticas. Sobre esse tema, diversos ensaios podem ser encontrados na edição especial *From Basic Cognition to mathematical practice* da revista Theoria (de Paz & Ferreirós, 2018). Nesse sentido, também pode-se citar como exemplo os estudos de Giaquinto (2007) sobre o funcionamento do sistema visual humano e sua relação com a formação de conceitos sobre formas geométricas.

Por fim, a vertente epistemológica caracteriza-se principalmente pela busca de respostas para questões tradicionais dentro da Filosofia da Matemática, tais como sobre a natureza dos objetos matemáticos e como os conhecemos, mas colocando análise de práticas matemáticas e casos de estudo como parte central da metodologia empregada para responder tais questões. Além disso, uma extensão de tópicos é adicionada às questões tradicionais tais como a explicação matemática, representação diagramática, entendimento, fecundidade e o papel da visualização na justificação e descoberta matemática.

A emergência dessas vertentes dentro da Filosofia da Prática Matemática possibilitou diversas perguntas sobre o papel do raciocínio diagramático euclidiano. A geometria euclidiana foi tomada como um caso de estudo relevante tanto para a compreensão do papel da visualização na produção de conhecimento matemático, bem como para investigar e estender a concepção de prova matemática para além das restrições sintático-lógicas das concepções formalistas. As seguintes questões, por exemplo, tomam um papel central: (i) qual o papel epistêmico que diagramas podem ter em práticas matemáticas distintas; (ii) quais as habilidades que são empregadas no uso regimentado de diagramas na geometria euclidiana; (iii) como diagramas particulares podem ser empregados na justificação de proposições gerais; (iv) como diagramas podem ser empregados em provas por *reductio ad absurdum*; (v) de que natureza é o tipo de representação diagramática que encontramos nos *Elementos*. Na seção 3 destaco algumas direções frutíferas no delineamento de tais questões. Antes, apresento algumas críticas que estão no cerne da má reputação que o uso de diagramas na justificação matemática recebeu, destacando aquelas baseadas no argumento de que diagramas supostamente facilitariam falácias – e, portanto, que não deveriam ter um papel epistemológico significativo em provas.

§2. Uso de diagramas na geometria: *must Euclid really go*?

Ao final do século XIX o uso de diagramas na justificação matemática foi, de maneira geral, considerado não-rigoroso e alheio ao conceito de prova. Como mencionamos na seção anterior, o conceito de prova foi identificado com derivações em um sistema formal. Uma expressão dessa concepção é exemplificada nos escritos do notório grupo Bourbaki (1950): «toda teoria matemática é uma concatenação de proposições, cada uma derivada das precedentes em conformidade com as regras [formais] de um sistema lógico» (p. 223). Isso envolve, afirma Dieudonné (um dos membros de Bourbaki) «abster-se da introdução de qualquer diagrama no livro» (Dieudonné 1969, p. ix). Uma vez que diagramas desempenham um papel essencial nas provas euclidianas, a atitude desse grupo quanto à geometria dos *Elementos* era fortemente crítica, expressa inclusive sob forma de um manifesto: «*Euclid must go!*» (Dieudonné 1961, p. 35).

Outras afirmações emblemáticas dessa perspectiva podem ser encontradas em Russell (1901), que rejeita qualquer papel epistêmico relevante para diagramas na geometria: «anteriormente, foi sustentado tanto por filósofos quanto por matemáticos que as provas matemáticas dependiam das figuras; hoje em dia, isso é reconhecido como falso. Nos melhores livros não há figuras. O raciocínio procede a partir de regras estritas da lógica formal e de um conjunto de axiomas inicialmente introduzidos» (p. 93). Em Russel (1919, pp. 145-146) encontramos observações críticas sobre a concepção da matemática de Kant, dizendo que o último, por ver que os matemáticos de seu tempo não conseguiam provar teoremas sem apelo a figuras, inventou uma teoria de acordo com a qual a matemática sempre requer o apoio da intuição. O apelo à intuição, manifesta o autor, é um sinal de que a prova é defeituosa. Especificamente sobre a geometria euclidiana, sublinha:

> É perfeitamente verdadeiro, por exemplo, que qualquer um que tente, sem o uso da figura, deduzir a sétima proposição de Euclides [a partir] dos axiomas euclidianos, perceberá que a tarefa é impossível; e provavelmente não existia, no século dezoito, qualquer instância de raciocínio matemático logicamente correto, isto é, qualquer raciocínio que corretamente deduzisse seus resultados a partir de premissas explicitamente introduzidas pelo autor. Uma vez que a correção do resultado parecia indubitável, era natural supor que prova matemática é diferente de prova lógica. Mas o

> fato é que toda diferença recaía no fato de que as provas matemáticas eram simplesmente incorretas (*unsound*). (1919, p. 145)

Diversos filósofos e matemáticos se posicionaram de modo semelhante – (*cf.* Pasch 1882/1926, p. 43 apud Mancosu, 2005, p. 14; Dedekind 1963; Hilbert's 1894 lecture em Hallett & Majer, 2004) –, dos quais destacamos também a posição de Klein, que chama atenção ao perigo das falácias diagramáticas (o qual discutiremos no decorrer desta seção com algum detalhe): «há um perigo real de que um pupilo de Euclides possa, por causa de uma figura erroneamente desenhada, chegar a uma conclusão falsa. É desta maneira que os numerosos assim chamados sofismas geométricos nascem» (Klein 2004, p. 201).

A identificação de prova matemática com prova formal foi inspirada no Programa de Hilbert, que herda de Frege e Russell o projeto de formalizar todas as áreas da matemática e adiciona o requerimento de uma prova (por meio de um raciocínio finitista) da consistência de tais teorias formalizadas.[18] A seguinte avaliação de Norman (2003) sobre esse ponto nos parece acertada: «o estudo de sistemas de derivação estritamente formal como sistemas de representações de prova em várias áreas da matemática levou diretamente a uma ênfase generalizada de tais derivações formais como paradigmas de prova. Desta perspectiva formalista, a sugestão de que o diagrama tenha valor epistêmico é semelhante a um erro categórico» (p. 83). As figuras poderiam ser vistas como psicologicamente úteis, com utilidade pedagógica ou mesmo charmosas, mas não como recurso de justificação. Em *Visual thinking in mathematics* – uma das principais obras recentes sobre o raciocínio visual na matemática –, Giaquinto resume a visão predominante sobre o uso de diagramas destacando esses pontos:

> […] uma concepção muito notória, ainda prevalente, é a de que a utilidade de raciocínio visual na matemática é apenas psicológico, e não epistemológico. Imagens visuais ou diagramas podem ilustrar casos de uma definição, assim nos dando um acesso mais vívido a suas aplicações; eles podem nos ajudar a entender uma descrição de uma situação matemática ou os passos de um raciocínio dado textualmente; eles podem sugerir uma proposição para investigação ou uma ideia para uma prova. Assim, representações visuais têm um papel facilitador. Mas isso é tudo, na concepção prevalente. Eles não podem ser um recurso para descobertas, justificação, prova ou qualquer outra maneira de adicionar

18 Lassalle Casanave (2019), apresenta uma discussão sobre a identificação do conceito de prova com prova formal, bem como um questionamento sobre a adequação da avaliação das demonstrações euclidianas pelas lentes da concepção formal.

valor epistêmico ao nosso capital matemático – ou, pelo menos, é o que se presumia. (Giaquinto, 2007, p. 1)

Casos frequentemente citados dentro da literatura como razão para a suspeita do uso de diagramas pertencem à Análise. Um dos principais contraexemplos ao uso de intuições espaciais ou geométricas como confiáveis nesse ramo das matemáticas é o de funções contínuas não diferenciáveis em nenhum ponto. Como afirma Hahn (1933), «foi portanto uma grande surpresa quando Weierstrass anunciou a existência de uma curva que não possui um declive preciso ou tangente em nenhum ponto» (p. 82). Tais funções desafiam a possibilidade de representá-las graficamente. Como sugere Giaquinto (2011, p. 299), o caráter peculiar dessas curvas pode ser descrito intuitivamente da seguinte maneira: imagine uma curva gráfica com picos e vales bem definidos; agora imagine que, não obstante a aparência de que estes picos e vales são separados por áreas lisas da curva, ao fazer um *zoom* (magnificar, ampliar, ver por meio de uma lupa) nessas áreas aparentemente lisas, descobrimos que elas mesmas são constituídas por picos e vales ainda menores. Isto é, ao, observar uma área da curva aparentemente lisa mais de perto, descobrimos que, na verdade, ela é composta de picos e vales assim como a curva em sua dimensão original. Agora, imagine que este resultado se repita infinitamente, isto é, que todas as subsequentes aproximações mostrem que todas as áreas aparentemente lisas dessa curva sejam elas mesmas compostas de mais picos e vales. Assim deveria ser a curva gráfica que corretamente representasse uma função tal como a função de Weierstrass, que é contínua porém não diferenciável em nenhum ponto. Em outras palavras, a curva gráfica de tal função deveria consistir apenas de picos e vales sem nenhuma área lisa conectando-os. Tal curva é, como conclui Giaquinto, não-visualizável.[19]

Outro caso que reforçou a suspeita ao valor epistêmico dos diagramas foi o das curvas de preenchimento de espaço introduzidas por Peano. O autor

[19] Sobre esse desafio à confiabilidade do pensamento visual, ver a análise de Giaquinto (2011). O autor apresenta uma defesa de inferências diagramáticas nos casos presentes na geometria euclidiana e uma rejeição de que o mesmo tipo de inferência poderia ser feita no caso das funções contínuas, avançando a tese de que, uma vez que o domínio de objetos tratados é muito distinto, é possível que em um domínio o diagrama seja suficientemente seguro como base de inferência e em outro domínio, não. Um dos pontos ao qual o autor chama a atenção, é a homogeneidade e heterogeneidade dos domínios de generalização. Em geometria euclidiana, círculos que se cruzam um ao centro do outro formam uma classe muito homogênea em suas propriedades geométricas. Já as funções contínuas no intervalo dos reais são muito heterogêneas (algumas têm curvas simples visualizáveis, outras não e outras nem tem curvas. Sendo assim, generalizar de um diagrama de uma simples curva cruzando uma linha horizontal no último caso não é seguro.

mostrou que é possível definir uma curva que preenche completamente uma região bidimensional, onde uma curva é qualquer conjunto de pontos em que o intervalo unitário dos números reais [0,1] pode ser continuamente mapeado. Isso é contraintuitivo, pois uma curva com pontos finais pareceria ser uma figura com comprimento, mas não área. Tais curvas envolvem situações que parecem não ser representáveis visualmente. De fato, apesar de ser comum usar diagramas para dar uma ideia geral de como curvas de preenchimento de espaço são geradas, esses diagramas possuem apenas um papel pedagógico, auxiliando a entender o processo por meio do qual uma curva conseguiria – se o raciocínio se prolongasse infinitamente – preencher uma área bi-dimensional (*cf.* Hahn, 1933 pp.85-88). Uma prova da existência dessas curvas, por outro lado, não pode depender de sua representabilidade gráfica. Assim como no caso das funções contínuas não diferenciáveis em nenhum ponto, curvas de preenchimento de espaço requerem menção ao infinito; nisso poderia residir a limitação do uso de diagramas. De qualquer maneira, esses dois casos específicos em Análise parecem mostrar que existem objetos matemáticos que não podem ser investigados por meio de raciocínio diagramático.

Outro evento que nos parece pertinente mencionar, é o das formulações de falácias diagramáticas utilizadas como indício da natureza enganosa das provas euclidianas. Klein, por exemplo, descreve uma delas, a falácia ‘todo o triângulo é isósceles’ (formulada primeiramente por Rouse Ball, 1905, pp. 44-45), popular nas discussões sobre ‘falácias geométricas’. A proposição consiste em, dado um triângulo ABC, provar que necessariamente AB é igual a AC (Fig 1). A construção percorre os seguintes passos: deixe o bisector interno do ângulo A encontrar o bisector perpendicular de BC em O. Trace OD, OQ, OR perpendicular a BC, CA, AB, respectivamente. Seguiremos a exposição de Norman (2003) da demonstração: DO é igual a DO [por auto-identidade de DO], DB é igual a DC [pela bisecção de BC], o ângulo <ODB é igual ao ângulo <ODC [congruência lado-ângulo-lado], logo OB=OC. AO é igual a AO [auto-identidade de AO], o ângulo <RAO é igual ao ângulo <QAO [pela bisecção do ângulo BAC], o ângulo ARO é igual ao ângulo AQO [pois OR é perpendicular à AB, e OQ à AC]. Logo, o triângulo ARO é igual ao triângulo AQO, AR igual à AQ, OR igual à OQ. Então, nos triângulos OBR, OCQ, o ângulo ORB é igual ao ângulo OQC [pois OR é perpendicular à AB, OQ à AC], o triângulo ORB é equivalente ao triângulo OQC [pois são triângulos-retângulos com lados e hipotenusas iguais], RB é igual à QC. Finalmente, AB é igual à soma de AR e RB [por inspeção de AB no diagrama], AB é igual à soma de AQ e QC [se segue de AR ser igual à AQ, RB igual à QC e AB ser igual à soma de AQ e QC] e AB é

igual a AC [se segue do passo anterior e inspeção de AC]. Logo, para todo triângulo, conclui-se que dois de seus lados são iguais e é, portanto, isósceles.

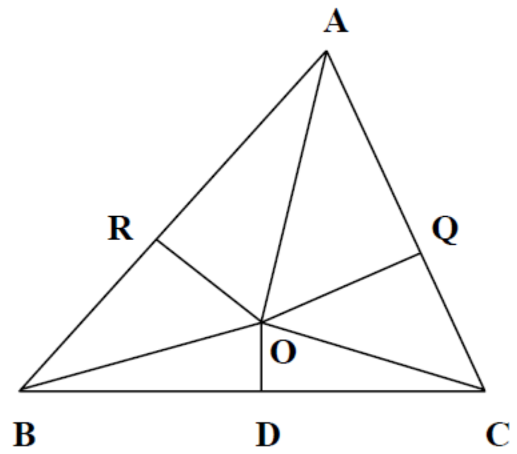


Figura 1. Figura extraída de Norman (2003, p. 3)

§3. Legitimidade do uso de diagramas em Euclides

Uma vez descrito um número de episódios que foram associados, ao menos em parte, à desconfiança do uso de raciocínio diagramático em Euclides, façamos algumas considerações iniciais sobre os mesmos, começando pelo último. Algumas análises recentes mostram que o sucesso da falácia descrita na seção anterior depende de um fator crucial, a saber, tomar a configuração diagramática como construída na Fig 1 e deixar de analisar outras configurações compatíveis com a instrução textual da exposição da proposição. Isto é, na 'prova' da falácia, geralmente é apresentada uma configuração onde o ponto O – intersecção do bisector do ângulo A e o bisector perpendicular de BC – cai dentro do triângulo ABC (Fig 1). Porém, configurações em que esse ponto cai em cima da linha BC ou em que ele cai fora do triângulo ABC são igualmente possíveis. Nessas últimas configurações (Fig. 2), o sucesso da falácia cai por terra: os passos 'AB é igual à soma de AR e RB' e 'AB é igual a AC' já não são assegurados (para mais detalhes da falácia e suas configurações distintas permitidas, das quais uma resulta na refutação da prova, *cf.* Manders, 2008b, pp.94-96; Norman, 2003, pp.2-7).

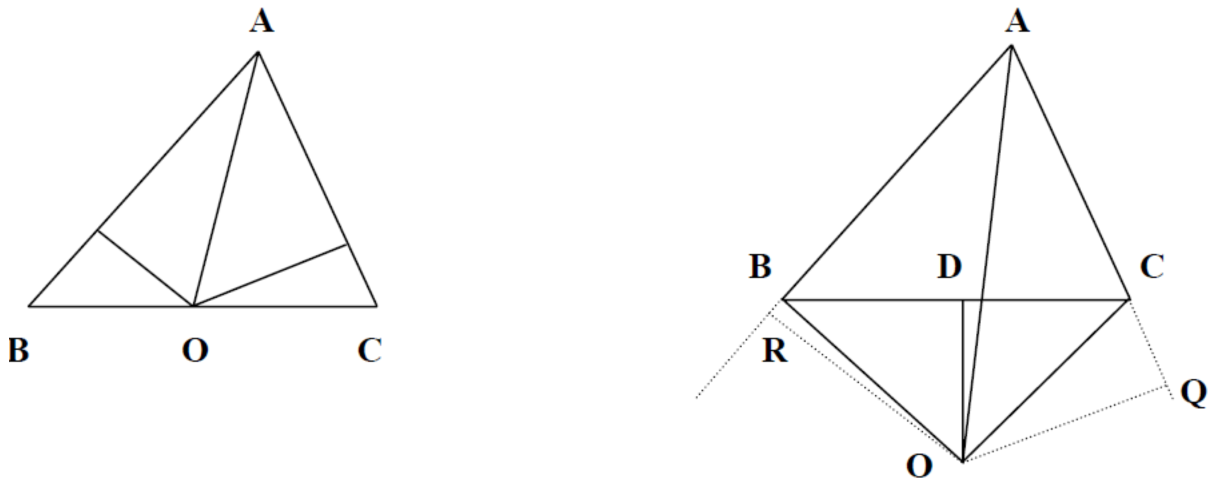


Figura 2. Figura extraída de Norman (2003, p. 5)

O estudo minucioso de autores como Manders sobre o raciocínio diagramático na geometria euclidiana (2008a; 2008b), nos ajuda a compreender tais falácias e reconsiderar seu impacto. Sua análise nos ensina que, uma vez que os requisitos para a manipulação cuidadosa dos diagramas em Euclides são conhecidos – em outros termos, as competências envolvidas são aprendidas –, não há razão para pensar que as figuras nos colocam em constante perigo de cometer falácias. Pelo nome de disciplina diagramática, o autor refere-se aos requisitos para o uso legítimo de diagramas, sendo um deles o de que, quando há provas cujas configurações diagramáticas poderiam possuir variantes, deve-se inspecionar o diagrama a partir da análise de casos. É intolerável se alguma das configurações diagramáticas leva à prova da afirmação e a outra à refutação. Se a demonstração da falácia 'todos os triângulos são isósceles' é analisada levando-se em conta esse requisito, ela é deficiente porque não são investigadas as configurações possíveis para o diagrama na prova, sendo que uma das configurações ignoradas é justamente a que refutaria o resultado. Assim, falácias diagramáticas como a descrita acima não passariam despercebidas dentro da prática euclidiana. Nessa direção vão também as seguintes observações de Norman (2003):

> [...] é equivocado inferir a partir desta clara e corrigível má representação que os diagramas em Euclides são, de maneira geral, enganosos. Embora os diagramas em Euclides possam e algumas vezes necessitam de uma manipulação cuidadosa, esta objeção, em si mesma, não nos oferece nenhuma razão para pensar ou que eles são enganosos para um praticante com competência adequada ou que raciocínio com diagramas do(s) tipo(s) que encontramos em Euclides é geralmente falacioso (p. 7).

Sobre os dois primeiros exemplos que apontamos – Função de Weierstrass e Curvas de Peano –, nos parece oportuna a seguinte pergunta: eles mostram que raciocínios diagramáticos não podem ser confiáveis em nenhuma circunstância, ou simplesmente atentam ao fato de que há limites na utilização desse tipo de raciocínio? Apesar dessas observações feitas no domínio de Análise serem corretas, são pertinentes as reservas feitas por Manders e Giaquinto sobre seu alcance. Como afirma o primeiro, «a mera existência de objetos geométricos intratáveis diagramaticamente, tais como curvas de preenchimento de espaço ou geometrias Riemannianas em geral, não é suficiente para julgar como inadequada a justificação do raciocínio baseado em diagramas tradicional que não tem intenção em lidar com tais objetos» (p. 66). A existência de diferentes formas de raciocínio geométrico não implica na rejeição da adequação do uso de diagramas para todas elas (*cf.* Giaquinto, 2011).

Coloquemos a questão de outra forma. Digamos que a rejeição ao uso de raciocínio visuoespacial, juntamente com a visão de que se trata constantemente de um raciocínio não rigoroso, seja correta. Nesse caso, outras questões interessantes devem ser respondidas, tais como: como pode ser que práticas matemáticas que possuem um uso pervasivo desse tipo de ferramenta de raciocínio não incorreram em erros? Como conhecimento foi obtido desse modo? Como poderíamos entender o fato de que o conhecimento matemático produzido em séculos passados são resultados estáveis, embora façam uso desse meio de raciocínio que não corresponde a requerimentos básicos de rigor impostos hoje em dia?

Questões como essas levaram nas últimas décadas a uma reavaliação do papel dos diagramas.[20] Diversos autores[21] têm se preocupado em analisar se o raciocínio diagramático pode conferir conhecimento matemático, buscando elucidar, entre outros aspectos, como as propriedades dos recursos

20 Outras áreas como a lógica, ciência cognitiva e ciência da computação, também têm se voltado para a pesquisa sobre o raciocínio diagramático. Na lógica, alguns filósofos como Shin (1994) e Hammer (1995) têm apresentado alguns estudos mostrando que sistemas diagramáticos de representação podem ser completos no mesmo sentido que sistemas simbólicos. Alguns filósofos da mente e cientistas cognitivos têm explorado o papel das representações diagramáticas no raciocínio humano. Já os cientistas da computação se interessam pelo estudo dos diversos sistemas de representação gráfica em áreas da ciência da computação, como, por exemplo, programação visual, sistemas de design etc. Sobre essas pesquisas recentes e alguns resultados, *cf.* Shin, Lemon e Mumma (2014). Para uma versão atualizada sobre as discussões desse tópico, ver a entrada de Giaquinto (2015) na *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

21 Para citar alguns exemplos: *cf.* Giaquinto, 2007; 2008; 2011; Mancosu et al, 2005; Giardino, 2010, 2013, 2017; Manders 2008a, 2008b; Macbeth, 2010, 2014; Panza, 2012; Mumma, 2010; Seoane, 2006.; Lassalle Casanave, 2013; Lassalle Casanave & Panza (2015).

visuoespaciais podem servir como base para inferências. Como Mancosu destaca, representações visuais são claramente «parte do processo de fazer matemática» (Hoffman, citado em Mancosu, 2005, p. 19). Diagramas foram essenciais ao raciocínio matemático ao menos até a emergência da álgebra nos séculos XVII e XVIII. Negar que possam desempenhar um papel importante na matemática é rebaixar alguns métodos e resultados sobre os quais a matemática atual repousa.

Uma visão geral sobre o papel de ferramentas diagramáticas na matemática pode ser encontrada em autores como Giardino (2013) e Ferreirós (2016), a saber: diagramas não devem ser vistos como representações estáticas de objetos abstratos, mas sim como ferramentas operativas, utilizadas de acordo com regras e propósitos específicos dentro das distintas práticas matemáticas. O uso produtivo dessas ferramentas, propõem esses autores, é intrínseco aos objetivos, métodos e busca de resultados que guiam as comunidades matemáticas. Para usar os termos de Ferreirós, seu valor é determinado pelos *frameworks* teórico e simbólico da tradição matemática nos quais participam. O *framework* simbólico é constituído pelo modo de representar problemas, soluções e provas dentro de uma prática matemática (por meio de signos pictográficos, fórmulas, diagramas, funções etc). Em outras palavras, trata-se do sistema de representação da teoria matemática. Como adverte o autor, a análise dos distintos *frameworks* simbólicos das práticas matemáticas não deve ser subestimada: se o interesse não é restrito aos resultados estabelecidos pelas práticas, mas também às formas de raciocínio por meio das quais tais resultados são alcançados, o sistema particular de representação empregado deve ser colocado no centro da investigação. Já o *framework* teórico é constituído pelas diferentes proposições aceitas pelos agentes em uma determinada prática matemática, as formas de raciocínio permitidas, e as questões e conjecturas das quais parte a investigação (Ferreirós, 2016).[22] Lassalle Casanave (2019) argumenta em uma direção similar a Ferreirós, propondo que a tarefa de aclaração filosófica do conceito de demonstração matemática deve levar em consideração as ferramentas de raciocínio usadas dentro das específicas práticas em questão (sejam elas diagramas ou fórmulas) em conexão com as habilidades

[22] Essa proposta motivou diversos estudos sobre as habilidades empregadas no uso de distintos frameworks simbólicos em distintas práticas matemáticas. Em Dal Magro & García-Perez (2019) exploramos quais são as bases cognitivas do uso dos diagramas na geometria euclidiana. Apresentamos uma análise de experimentos nas ciências cognitivas (Dehaene et al 2006; Van der Ham et al, 2017) e argumentamos que o uso inferencial das figuras em Euclides está enraizado em aspectos da cognição espacial universalmente compartilhados (isto é, independente de educação formal em matemáticas, de sua linguagem e contexto socio-cultural).

e competências da comunidade matemática no uso produtivo de tais ferramentas.

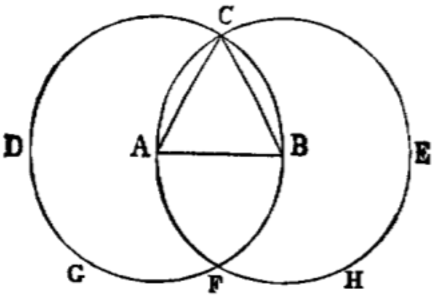
Especificamente sobre a prática diagramática euclidiana, Manders (2008a) defende que ela merece atenção filosófica pela simples razão de que foi uma ferramenta estável e frutífera de investigação através de diversos contextos por mais de dois milênios. Até o século XIX, ninguém haveria negado que se tratava de uma prática legítima e rigorosa. Sendo assim, de acordo com o autor, o problema que merece atenção não é se as provas de Euclides são ou não legítimas, mas sim a elucidação do por que diagramas são ferramentas confiáveis nessa prática. Uma das grandes contribuições de seu trabalho foi determinar precisamente quais são os passos nas provas que são permitidos a partir da inspeção do diagrama.

Em linhas gerais, Manders mostra como elementos textuais e diagramáticos cooperam no estabelecimento da prova euclidianas, abrindo caminho para entender em que medida Euclides usa as figuras como recurso da demonstração: apenas com respeito àqueles aspectos que são invariantes a uma gama de deformações e aperfeiçoamentos do diagrama, os quais se denominam 'co-exatos'. Esses são, de modo geral, aspectos mereológicos e topológicos que resultam da inter-relação entre as sucessivas entradas diagramáticas.[23] Exemplos típicos desses aspectos são relações de inclusão, interioridade, exterioridade e relações de intersecção. Um exemplo de aspecto co-exato aparece já na primeira demonstração do Livro I dos *Elementos*: quando traçamos dois círculos na parte construtiva da prova (construção permitida pelo terceiro postulado), 'vemos' que eles se intersectam em um ponto C (Fig 3). A existência desse ponto de intersecção é um aspecto co-exato que extraímos diretamente do diagrama e que é empregado nos passos seguintes da prova (do ponto C, no qual os círculos cortam um ao outro, e a partir dos pontos A e B, trace as linhas retas CA e CB – construção permitida pelo primeiro postulado). Esse ponto de intersecção aparece mesmo que os círculos sejam mal desenhados ou deformados (Fig. 4).

[23] Sobre a função dos postulados em limitar os movimentos diagramáticos permitidos, *cf.* Ferreirós (2016, cap. 5).

PROP. I.—PROBLEM.

On a given finite right line (AB) to construct an equilateral triangle.



Sol.—With A as centre, and AB as radius, describe the circle BCD (Post. III.). With B as centre, and BA as radius, describe the circle ACE, cutting the former circle in C. Join CA, CB (Post. I.). Then ABC *is the equilateral triangle required.*

Dem.—Because A is the centre of the circle BCD, AC is equal to AB (Def. XXXII.). Again, because B is the centre of the circle ACE, BC is equal to BA. Hence we have proved.

$$AC = AB,$$

and $$BC = AB.$$

But things which are equal to the same are equal to one another (Axiom I.); therefore AC is equal to BC; therefore the three lines AB, BC, CA are equal to one another. Hence the triangle ABC is equilateral (Def. XXI.); and it is described on the given line AB, *which was required to be done.*

Figura 3. Proposição I.1 dos *Elementos* (extraída de Heath 1968, p.8).

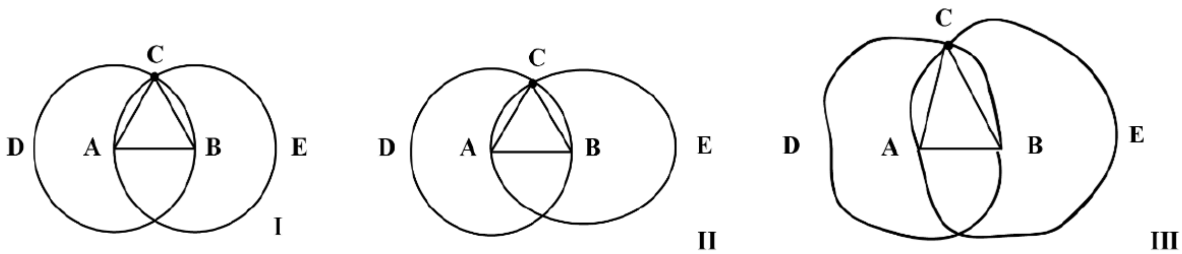


Figura 4. Como se pode observar, o ponto C aparece nos três casos, permanecendo estável sob deformações do diagrama.

Já os aspectos métricos do diagrama, por outro lado, são pouco resilientes a mínimas deformações do desenho e devem sempre ser justificados textualmente.[24] Sendo assim, para estabelecer igualdades ou proporcionalidades entre segmentos, ângulos ou figuras, deve-se sempre basear-se nas definições, postulados, noções comuns e/ou estipulações textuais da prova em questão. Também a informação de que uma linha é reta ou que uma

[24] Exceto quando se seguem diretamente de um aspecto co-exato, como, por exemplo, quando pode-se deduzir que uma região do diagrama é menor que outra a partir do aspecto mereológico de que uma é parte da outra.

região do diagrama é um círculo deve ser baseada nas entradas textuais que acompanham o diagrama. Na prova I.1, a informação de que o ponto A é o centro de um dos círculos, por exemplo, jamais poderia ser extraída do diagrama, mesmo que o diagrama pudesse sugeri-la – já que ela não sobreviveria à mínima deformação da figura, como pode ser visto na Fig. 2). Esses aspectos métricos que podem ser justificados apenas com base nas informações textuais, Manders denomina de 'exatos'. Em resumo, a parte textual da prova justifica informações exatas, enquanto a parte diagramática autoriza passos acerca de aspectos co-exatos. A observação chave de Manders é a de que os diagramas em Euclides são usados somente como um recurso de informação co-exata. Euclides nunca infere informação exata a partir da figura (Manders, 2008b, p. 91). Com isso, Euclides teria limitado o uso inferencial de diagramas somente àqueles aspectos do diagrama que manifestam estabilidade: não elimináveis nem por deformação nem por refinamento da figura.

Essa é uma primeira pista, proponho, para o início da resposta de porquê o uso de diagramas na prática euclidiana não facilita erros/falácias. Extrair do diagrama somente informações coexatas e analisar configurações diagramáticas distintas quando necessário são pré-requisitos para seu uso legítimo. Pré-requisito que a falácia 'todos os triângulos são isósceles' não cumpre.

§4. Considerações finais

O intuito principal deste trabalho foi o de descrever alguns fragmentos considerados relevantes no enredo histórico da condenação das supostas infrações matemáticas de Euclides. Busquei também fornecer alguns questionamentos sobre em que medida as críticas apresentadas de fato minam as provas presentes nos *Elementos*. Por fim, ilustrei como nos últimos anos diversos trabalhos foram direcionados à investigação do papel epistemológico dos diagramas euclidianos, buscando identificar os usos legítimos desse tipo de ferramentas na prática euclidiana. Como já atentava Manders, «o uso do diagrama em Euclides nos força a confrontar a prática matemática demonstrativa de uma forma muito mais rica do que está implícito nas noções de teoria matemática e prova formal sobre as quais tantos trabalhos recentes em filosofia estão baseados [...]. As oportunidades filosóficas são extraordinárias» (2008a, p. 68).

REFERENCIAS

ASPRAY, William e KITCHER, Philip (1988). *History and philosophy of modern mathematics.* Minneapolis: University of Minnesota Press.

AYER, Alfred J. (1936). *Language, Truth and Logic.* London: Dover

BENACERRAF, Paul (1965). «What Numbers Could Not Be». In Benacerraf, P. & Putnam, H. (eds), *Philosophy of Mathematics: Selected readings*, (1983), Cambridge: Cambridge University Press, 2nd edition, pp. 272–294.

BENACERRAF, Paul (1973). «Mathematical Truth». In Benacerraf, P. & Putnam, H. (eds), *Philosophy of Mathematics: Selected readings*, (1983), Cambridge: Cambridge University Press, 2nd edition, pp. 403–420.

BOURBAKI, Nicolas (1949), «Foundations of mathematics for the working mathematician». *The Journal of Symbolic Logic* 14(1): 1–8.

BOURBAKI, Nicolas (1950). «The architecture of mathematics». *The American Mathematical Monthly* 57: 221–232.

BOURBAKI, Nicolas (1968). *Theory of sets.* Reading: Addison-Wesley.

BOURGESS, John P. e ROSEN, Gideon (1997). *A subject with no object: strategies for nominalistic interpretation of Mathematics.* Oxford: Claredon Press.

BROWN, James (1999), *Philosophy of Mathematics: an introduction to the world of profs and pictures.* London: Routledge.

CARTER, Jessica (2019). «Philosophy of mathematical practice – motivations, themes and prospects». *Philosophia Mathematica* (III) 27: 1-32.

CELLUCCI, Carlo (2012). «Top-down and bottom-up philosophy of mathematics». *Found Sci* 18: 93-103.

CELLUCCI, Carlo (2002). *Filosofia e matemática.* Bari: Laterza.

COLYVAN, Mark (2001). *The indispensability of Mathematics.* Oxford: Oxford University Press.

CORFIELD, David (2003). *Towards a philosophy of real mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press.

CURRY, Haskell (1958). *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics.* Amsterdam: North-Holland.

DAL MAGRO, Tamires e GARCÍA-PEREZ, Manuel J. (2019). «On Euclidean diagrams and geometrical knowledge». *Theoria. An International Journal for Theory, History and Foundations of Science* 34(2): 222-276.

DAVIS, Philip e HERSH, Reuben (1980), *The mathematical experience.* Basel: Birkhäuser.

DEDEKIND, Richard (1963). «Continuity and the Irrational Numbers». In W. Beman, trans., *Essays on the Theory of Numbers*. New York: Dover Publications, pp. 1-27.

DE PAZ, María e FERREIRÓS, José (2018). «From Basic Cognition to Mathematical Practice». Special Issue, (eds), *Theoria. An International Journal for Theory, History and Foundations of Science* 33 (2): 267-269.

DIEUDONNÉ, Jean (1961). «New thinking in school mathematics. The Royaumont Seminar November 23–December 3». Paris: Organisation for European Economic Co-Operation, pp. 31–46

DIEUDONNÉ, Jean (1969). *Foundations of modern analysis.* New York: Academic Press.

FERREIRÓS, José (2016). *Mathematical knowledge and the interplay of practices.* Princeton University Press.

FERREIRÓS, José (2008). «The Crisis in the Foundations of Mathematics». In Gowers, T (ed.), *Princeton Companion to Mathematics.* Princeton: Princeton University Press, pp. 1-14

FERREIRÓS, José e LASSALLE CASANAVE, Abel (eds) (2016). *El árbol de los números: cognición, lógica y prática matemática.* Sevilla: Editorial Universidad de Sevilla.

FERREIRÓS, José e GRAY, Jeremy, eds. (2006). *The architeture of modern Mathematics: essays in history and philosophy.* Oxford University Press.

FERREIRÓS, José e GARCÍA-PÉREZ, Manuel J. (2018). «¿"Natural" y "Euclidiana"? Reflexiones sobre la geometría práctica y sus raíces cognitivas». *Theoria. An International Journal for Theory, History and Foundations of Science* 33 (2): 325-344.

FIELD, Hartry (1989). *Realism, Mathematics and Modality.* Oxford: Blackwell.

GIAQUINTO, Marcus (2015). «The epistemology of visual thinking in mathematics». *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* http://plato.stanford.edu/archives/win2015/entries/epistemology-visualthinking/

GIAQUINTO, Marcus (2011). «Crossing curves: a limit to the use of diagrams in proofs». *Philosophia Mathematica (III)* 19 (3): 281-307.

GIAQUINTO, Marcus (2008). «Visualizing in mathematics». In P. Mancosu (ed.), *The philosophy of mathematical practice.* New York: Oxford University Press, pp. 22-42.

GIAQUINTO, Marcus (2007). *Visual thinking in mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

GIARDINO, Valeria (2017). «Diagrammatic reasoning in mathematics». In Magnani & Bertolotti (eds), *Springer Handbook of Model-Based Science*. London-NewYork: Springer, pp. 499-522.

GIARDINO, Valeria (2016). «¿Dónde situar los fundamentos cognitivos de las matemáticas? ». En J. Ferreirós & A. Lassalle Casanave (Eds.), *El árbol de los números: cognición, lógica y práctica matemática.* Sevilla: Editorial Universidad de Sevilla, pp. 23-50.

GIARDINO, Valeria (2013). «A practice-based approach to diagrams». In M. Aminrouche & S. Shin (eds), *Visual reasoning with diagrams.* Basel: Birkhäuser, pp 135-151.

GIARDINO, Valeria (2010). «Intuition and Visualization in Mathematical Problem Solving». *Topoi* 29 (1): 29-39.

GILLIES, Donald (1992). *Revolutions in mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

HALLETT, Michael e ULRICH, Majer (2004). *David Hilbert's lectures on the foundations of geometry, 1891–1902*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.

HALE, Bob e WRIGHT, Crispin (2001). T*he reason's proper study: essays towards a neo-Fregean Philosophy of Mathematics.* Oxford: Oxford University Press.

HAMMER, Eric (1995). «Reasoning with sentences and diagrams». *Notre Dame Journal of Formal Logic* 35(1): 73-87.

HAHN, Hans (1933). «The crisis of intuition» in Hans Hahn, *Empiricism, Logic and Mathematics*. London: D. Reidel Publishing Company

HERSH, Reuben (1979). «Some proposals for reviving the philosophy of mathematics». *Advances in Mathematics* 31: 31–50.

KITCHER, Philip (1984). *The nature of mathematical knowledge.* Oxford: Oxford University Press.

KLEIN, Felix (2004). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Geometry*. Mineola: Dover.

KLEIN, Morris (1980). *Mathematics: the loss of certainty*. Oxford: Oxford University Press.

KRIEGER, Martin (2003). *Doing mathematics: convention, subject, calculation, analogy*. Singapore: World Scientific Publishing.

LAKATOS, Imre (1978). *A lógica do descobrimento matemático: provas e refutações*. Rio de Janeiro: Zahar.

LASSALLE CASANAVE, Abel (2013). «Diagramas en pruebas geométricas por *reductio ad absurdum*». In O. M. Esquisabel & F. T. Sautter (eds), *Conocimiento simbólico y conocimiento gráfico*. Buenos Aires: Centro de Estudios Filosóficos Eugenio Pucciare.

LASSALLE CASANAVE, Abel (2019). *Por construção de conceitos: em torno da filosofia kantiana da matemática*. Rio de Janeiro: PUC-Rio.

LASSALLE CASANAVE, Abel e PANZA, Marco (2015). «Pruebas entinemáticas y pruebas canónicas en la geometría plana de Euclides». Revista Latinoamericana de Filosofía 41/2: 147-170.

LINNEBO, Øysten (2017). *Philosophy of Mathematics.* Princeton: Princeton University Press.

MACBETH, Danielle (2014). *Realizing reason: a narrative of truth and knowing*. Oxford: Oxford University Press.

MACBETH, Danielle (2010). «Diagrammatic reasoning in Euclid's Elements». In B. Van Kerkhove, J. De Vuyst, and J. P. Van Bendegem (eds.), P*hilosophical perspectives on mathematical practice.* London: College Publications, pp. 235-267.

MADDY, Penelope (1990). *Realism in Mathematics.* Oxford: Clarendon Press.

MADDY, Penelope (1997). *Naturalism in Mathematics.* Oxford: Clarendon Press.

MANCOSU, Paolo, ed. (2008). *The philosophy of mathematical practice*. New York: Oxford University Press.

MANCOSU, Paolo (2005). «Visualization in logic and mathematics». In P. Mancosu, K. F. Jørgensen and S. A. Pedersen, eds., *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics*. Dordrecht: Springer, pp. 13-30

MANCOSU, Paolo, JORGENSEN, Klaus F. e PEDERSEN, Stig A., eds. (2005). *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics*. Dordrecht: Springer.

MANDERS, Kenneth (2008a). «Diagram-based geometric practice». In P. Mancosu (ed.), *The philosophy of mathematical practice*. New York: Oxford University Press, pp. 65-79.

MANDERS, Kenneth (2008b). «The euclidean diagram». In P. Mancosu (ed.), *The philosophy of mathematical practice*. New York: Oxford University Press, pp. 80-133.

MUMMA, John (2010). «Proofs, pictures and Euclid». Synthese, 175 (2): 255-287.

NORMAN, Jesse (2003). *Visual reasoning in Euclid's geometry: an epistemology of diagrams*. Philosophy PhD. University College London.

OVERMANN, Karenleigh (2013). «Material Scaffolds in Numbers and Time». *Cambridge Archaeological Journal* 23(1): 19–39.

PALMER, Stephen (1990). «Modern theories of gestalt perception». *Mind and Language*, 54: 289–323.

PALMER, Stephen (1999). *Vision Science: Photons to Phenomenology*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

PANZA, Marco (2012). «The twofold role of diagrams in Euclid's plane geometry». *Synthese* 186: 55-102.

RECK, Erich e PRICE, Michael (2000). «Structures and structuralism in contemporary Philosophy of Mathematics». *Synthese* 125: 341-383.

RESNIK, Michael (1997). *Mathematics as a science of patterns.* Oxford: Claredon Press.

ROBINSON, Abraham (1969). «From a Formalist's Point of View». *Dialectica* 23: 45-49.

RUSSELL, Bertrand (1901). «Mathematics and the Metaphysicians». In B. Russell, *Mysticism and Logic and Other Essays*. London: George Allen and Unwin LTD, pp. 74-96.

RUSSELL, Bertrand (1919). In*troduction to Mathematical Philosophy*. Lodon: Routledge.

SECCO, Gisele D. (2016). «Computadores nas práticas matemáticas: um exercício de micro história». *O que nos faz pensar* (25): 105-122.

SECCO, Gisele D. e PEREIRA Luiz Carlos (2017). «Proofs Versus Experiments: Wittgensteinian Themes Surrounding the Four-Color Theorem». In: Marcos Silva. (Org.), *How Colours Matter to Philosophy*. Springer International Publishing (vol 388), pp. 289-307.

SEOANE, José (2006). «Representar y demonstrar: observaciones preliminares sobre diagramas». *Representaciones* 2 (2): 105-126.

SHAPIRO, Stewart (2000). *Thinking about Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

SHAPIRO, Stewart (1997). *Philosophy of Mathematics: structure and ontology.* Oxford: Oxford University Press.

SHIN, Sun-Joo (1994). *The logical status of diagrams*. Cambridge: Cambridge University Press.

SHIN, Sun-Joo, Lemon, Oliver e Mumma, John (2014). “Diagrams». *The Stanford Enciclopedy of Philosophy*. Disponível em: http://plato.stanford.edu/entries/diagrams/.

SPELKE, Elisabeth e LEE, Sang-ah (2012). «Core systems of geometry in animal minds». *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences* 367 (1603): 2784-2793.

TAPPENDEN, Jamie (2006). «The Riemannian background to Frege’s philosophy». In Ferreirós and Gray, *The architeture of modern Mathematics: essays in history and philosophy*. Oxford University Press, pp. 97–132.

TYMOCZKO, Thomas (1998 [1986]). *New directions in the philosophy of mathematics. Revised and extended version.* Princenton University Press.

WILHELMUS, Eva (2007). «Formalizability and Knowledge Ascriptions in Mathematical Practice». *ILLC research report and technical notes series: Logic, philosophy and linguistics series*. University of Amsterdam Institute for Logic, Language and Computation. doi: 10.1093/philmat/nkz002

VAN BENDEGEM, Jean P. (2014), «The impact of the Philosophy of Mathematical Practice to the Philosophy of Mathematics». In Soler, L., Zwart, S., Lynch, M., & Israel-Jost, V. (eds.), *Science after the Practice Turn in the Philosophy, History, and Social Studies of Science*. New York-London: Routledge, pp. 215-226.

Euclidean diagrams and mathematical justification

This work presents a historical overview of the problems dealt with by three major conceptions in the philosophy of mathematics: traditional, maverick and conciliatory. In the second and third sections, I focus on showcasing (1) how the use of diagrams in mathematics, and more specifically in Euclidean geometry, was strongly criticized by authors aligned with the first conception and (2) the impact of those criticisms in the re-evaluation and revindication of the legitimacy of the use of diagrams in Euclid by authors aligned with the last two conceptions.

Keywords: Philosophy of Mathematical Practice · Proof · Euclid · Diagrammatical Reasoning.

Diagramas euclidianos e justificação matemática

Este trabalho apresenta um panorama histórico dos problemas investigados em três vertentes dentro da filosofia da matemática: tradicional, maverick e conciliatória. Na segunda e terceira parte, o enfoque é em mostrar (1) como o uso dos diagramas na matemática, e mais especificamente na geometria Euclidiana, foi fortemente criticado por autores alinhados à primeira corrente e (2) o impacto de tais críticas na reavaliação e reivindicação da legitimidade do uso dos diagramas em Euclides como vem sendo feito por autores alinhados às últimas duas correntes.

Palabras Clave: Filosofia da prática matemática · Prova · Euclides · Raciocínio diagramático.

TAMIRES DAL MAGRO é pesquisadora de pós-doutorado (PNPD / CAPES) na área de Epistemologia e Lógica da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Brasil. Doutora em Filosofia [≈ PhD] pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP, Brasil). Sua pesquisa atual está especialmente focada em problemas relacionados à prática matemática, conhecimento simbólico, geometria euclidiana, fundamentos cognitivos da matemática, provas por reductio ad absurdum, provas heterogêneas, teorias de representação e raciocínio diagramático. Possui trabalhos publicados em *Synthese*, *Theoria* e *Crítica*.

Contato: Departamento de Filosofia, Universidade Federal de Santa Catarina, Rua Carvoeira, Bairro Trindade, 88040-900, Florianópolis / Santa Catarina, Brasil.

INFORMACIÓN DE CONTACTO | CONTACT INFORMATION: Departamento de Filosofia, Universidade Federal de Santa Catarina, Rua Carvoeira, Bairro Trindade, 88040-900, Florianópolis/Santa Catarina, Brasil. e-mail (✉): tamiresdma@gmail.com · iD: http://orcid.org/0000-0001-7423-9223.

HISTORIA DEL ARTÍCULO | ARTICLE HISTORY
Received: *22–January–2020*; Accepted: *18–June–2020*; Published Online: *17–September–2020*

COMO CITAR ESTE ARTÍCULO | HOW TO CITE THIS ARTICLE
Dal Magro, Tamires (2020). «Diagramas euclidianos e justificação matemática». *Disputatio. Philosophical Research Bulletin* 9, no. 14: pp. 73–102.