Didácticas fregeanas para una lógica táctil

ÁNGELA ROCÍO BEJARANO CHAVES

§1. El proyecto lógico fregeano: una apuesta desde el contenido

EN 1.879 FREGE PRESENTA A LA COMUNIDAD de lógicos y matemáticos la *Conceptografía,* un lenguaje formal, semejante al de la aritmética, para el pensamiento puro. Esta obra propone un lenguaje nuevo capaz de representar las relaciones lógicas entre pensamientos, algo que se volvió indispensable en la búsqueda de Frege por encontrar un método que permitiera probar, de manera rigurosa, la precisión de las cadenas inferenciales en las que los contenidos juzgables, o pensamientos, son protagonistas.

Su búsqueda fundamental se remonta a la pregunta por el número, ¿qué es el número? ¿cómo podría definirse? Estas preguntas le ocupan constantemente a lo largo de su carrera académica y filosófica. En ella, propone un principio que será rector en las apuestas que, a su vez, le permitirán responder a estas preguntas: el *Principio de Contexto*; según el cual el significado de una expresión debe buscarse en el todo oracional del que es parte y no de forma aislada (Frege 1884, p.38). De esta manera, la pregunta por qué es el número implica la pregunta por los enunciados aritméticos de los que el número es parte.

Al preguntarse por estos enunciados, surge la cuestión de su verdad. Si la pregunta por el número implica una revisión de estos, vale la pena ocuparse de si son verdaderos o no. Por esto Frege llega a plantearse la necesidad de la pregunta por la fundamentación de las verdades. ¿Cómo se fundamenta una verdad aritmética? ¿Por qué podemos decir que está fundamentado un determinado juicio acerca de los números? Esta pregunta, inmediatamente, y desde las primeras líneas de la Conceptografía, le lleva a afirmar que hay distintas formas en las que una verdad adquiere fundamento y que estas formas pueden estar determinadas solo por las relaciones entre distintos juicios. Veamos.

Frege sostiene que «dividimos en dos clases todas las verdades que requieren una fundamentación; mientras que la prueba puramente lógica puede preceder a las unas, las otras deben apoyarse en hechos empíricos» (1879, p. 3). Así pues,

A. Bejarano (✉)
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia
e–mail: arbejaranoc@pedagogica.edu.co

Disputatio. Philosophical Research Bulletin
Vol. 10, No. 17, Jun. 2021, pp. 231–250
ISSN: 2254–0601 | [SP] | **ARTÍCULO**

hay verdades que son verdaderas porque su prueba lógica está basada en las leyes en las que descansa todo el conocimiento: las leyes lógicas. Es decir, estas verdades adquieren su fundamento en dichas leyes.

En opinión del lógico alemán, las verdades de la aritmética son de este tipo, adquieren su fundamento en las verdades de la lógica (1884). Para demostrarlo decide construir una prueba lógica, a modo de un método baconiano[1], que le sirva para hacer un seguimiento riguroso de las inferencias en las que las verdades de la aritmética se siguen de las de la lógica y, con esta prueba, poder demostrar que unas verdades se fundamentan en las otras. No hay que olvidar que la prueba lógica fregeana se encarga de probar si hay preservación de verdad; es decir, si de la verdad de unos contenidos podemos afirmar la verdad de otros; en este caso, si de la verdad de los juicios de la lógica podemos afirmar la verdad de los de la aritmética.

Se hace patente, en la obra fregeana, una apuesta lógica que centra la mirada en las relaciones inferenciales, en las maneras en las que unos y otros contenidos se articulan, se implican y se fundamentan y, así mismo, se individúan: «una proposición general se consolida cada vez más seguramente al cobrar conexión con otras verdades a través de cadenas de inferencias, ya sea que de ella se deriven consecuencias que encuentren confirmación de otra manera, ya sea que, a la inversa, se la reconozca como consecuencia de proposiciones ya establecidas» (1879, p. 3).

Estas consideraciones fregeanas hoy se leen desde la óptica del *Inferencialismo Semántico*[2]; autoras como María José Frápolli o como Robert Brandom sostienen que en Frege existen antecedentes claros de esta propuesta de la filosofía del lenguaje contemporánea. Parece un precursor claro cuando afirma que los contenidos se consolidan, se obtienen, en sus relaciones con otros contenidos, y que estas relaciones son inferenciales (Frápolli y Villanueva, 2013; Brandom 2002).

Dada esta preocupación por las relaciones inferenciales se sigue una preocupación por la manera de representarlas. ¿Cómo hacerlo de la forma más

[1] Cuando Frege compara su propuesta con el método de Bacon, afirma que, así como este, su prueba puede ser aplicada de forma general a cualquier contenido de la ciencia; puede servir para probar las cadenas inferenciales en las que la verdad de unos contenidos implican, o aparentan implicar, la verdad de otros. El uso del método propuesto no se restringe al análisis de verdades aritméticas, pese a que son en las que Frege centra su atención (1879, p. 3–4).

[2] El *Inferencialismo Semántico* es la propuesta según la cual los contenidos, los significados, se obtienen e individúan en sus relaciones de fundamentación y consecuencia con otros contenidos (Frápolli y Villanueva, 2013).

justa y rigurosa? ¿Acaso el lenguaje natural es capaz de representar aquellas relaciones, de tal manera que posibilite la prueba? Recordemos que la representación debe ser capaz de evidenciar los aspectos necesarios y suficientes para verificar si hay una relación lógica entre distintos contenidos. En ese sentido, no debe admitir vaguedades, ambigüedades o incluir elementos que resten claridad o distraigan la atención de la rigurosidad de la prueba.

El lenguaje natural no es el ideal para la prueba lógica, precisamente porque puede contener estas ambigüedades, por ejemplo, con sus signos con múltiples significados; puede ser vago, como con sus términos con límites semánticos imprecisos; o puede contar con estos elementos distractores, como es el caso del tono (Frege, 1879–1891). En consecuencia, no es el lenguaje ideal para representar al pensamiento y a sus relaciones. De ahí no se sigue que su valor sea poco, pues, así como el ojo, tiene una gran amplitud y potencia, pese a que no cuente con la profundidad y especificidad del lente de un microscopio (Frege, 1879).

Así, el reto que asume Frege es el de crear un lenguaje que represente aquello constitutivo de las relaciones inferenciales, nada más y nada menos. Su propuesta es la de la notación conceptual:

> No quiero presentar una lógica abstracta con fórmulas, quiero expresar un contenido con signos escritos con la mayor claridad y precisión que sea posible obtener con palabras. De hecho, no quiero crear un simple *calculus ratiocinator* sino una *lingua characteristica* en el sentido de Leibniz, aunque reconozco que el cálculo inferencial mencionado es un componente necesario de la Conceptografía (1883, pp. 90– 91)

La notación conceptual, o escritura conceptual, es aquella que le permite cumplir este propósito: expresar contenidos con claridad y precisión. Por eso se vuelve fundamental en su propuesta lógica, que no consiste en la creación de un mero cálculo operativo, sino cuya creatividad se hace visible en un lenguaje universal: uno que permita representar cualquier contenido y sus múltiples relaciones inferenciales.

De lo anterior podemos inferir al menos dos cosas: primero, que para Frege este lenguaje tiene un papel expresivo, pues está pensado para expresar las relaciones lógicas por medio de las cuales se individúan pensamientos o contenidos judicables. Segundo, que para su proyecto lógico es fundamental la expresión de contenidos. Es decir, que no se trata de una lógica que centre su atención en el estudio de formas abstractas y abstraídas de los contenidos, sino que la pregunta por aquello que es representado, por estos, es fundamental, puesto que son los protagonistas de las relaciones inferenciales que luego pasarán por las pruebas lógicas.

Esta particularidad no es menor y por eso Frege la resalta cuando busca distinguir su proyecto de otros, como el propuesto por Boole. El lógico de Wismar hace énfasis en que los contenidos judicables, también llamados pensamientos, son la unidad mínima de significado y aquella que se involucra en las relaciones lógicas (Frege 1883). De ahí que un análisis lógico implique su revisión y no pueda descuidarle. En ese sentido, su propuesta lógica no parte del interés por el análisis de fórmulas vacías o de esqueletos sintácticos, sino que pone en el centro el asunto del contenido y desde allí aventura sus análisis.

Con este foco, propone un sistema notacional que aquí retomaremos y defenderemos: un sistema que, aunque similar al de la aritmética de su época, fuera distinto, en virtud de que lograra la representación de lo que él denominó el pensamiento puro, algo que no lograba, en su opinión, ningún otro lenguaje.

§2. La propuesta notacional de Gottlob Frege: la bidimensionalidad del lenguaje lógico

La simbolización que propone frege no solo se distingue visualmente de las de su época, puesto que se trata de un sistema bidimensional, en el que las relaciones lógicas no se representan de manera lineal y de izquierda a derecha; sino que se expresan con barras verticales y horizontales, y su jerarquía inferencial aparece representada verticalmente (Figura 1).

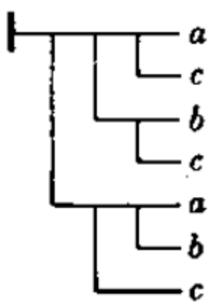


Figura 1. Representación de relación inferencial. Tomada de Frege (1879, §14).

En esta simbolización se expresan distintas relaciones de subordinación. La que aparece en la primera línea (a) puede entenderse como la tesis central, la afirmación concluyente que más abarca en la cadena inferencial: la conclusión. Sosteniéndola, de izquierda a derecha, está (a) fundamentada por los juicios (b) y (c); (b) siendo a su vez fundamentada por (c); y (c).

Estas relaciones lógicas, como la de fundamentación, se expresan por medio de barras, así:

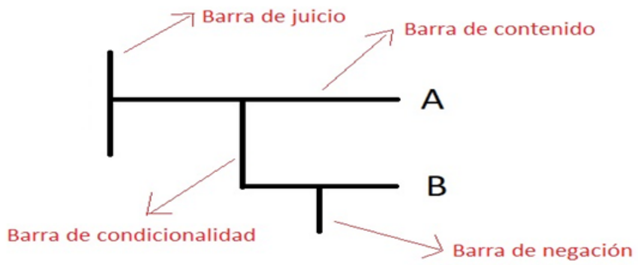


Figura 2. Las definiciones de las barras.

La barra de juicio es aquella que expresa que lo que se pondrá a continuación ha sido juzgado, que es un contenido que se afirma. El reconocimiento de su verdad, entonces, se hace explícito. Con esto, la barra separa a esta representación de aquella que se usa para indicar que lo que viene será una mera combinación de ideas, una que no se expresa como verdadera y que, por tanto, se representa en ausencia de la barra de juicio, así:

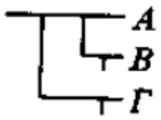


Figura 3. Relación inferencial no afirmada. Tomada de Frege (1879, §5).

Esta barra aparece, en la simbolización fregeana, de primeras, lo que nos lleva a pensar que la cuestión de la aseveración del contenido no es menor, es fundamental. No hay que dejar de lado que el propósito de este sistema notacional es la representación de las cadenas inferenciales, con miras a hacer con ellas pruebas lógicas, tales que permitan verificar, con rigurosidad, si existe preservación o no de la verdad entre contenidos. De ahí que sea tan importante, en este sistema, simbolizar la aseveración del contenido, puesto que será medular para hacer el análisis de las inferencias.

Esto último podría usarse como argumento en contra de las posiciones según las cuales la noción de verdad le quita protagonismo a la de inferencia o la de validez (Dummett 1973) y a favor de aquellas que sostienen que la noción de verdad se entiende en el proyecto fregeano a través de su rol inferencial (Brandom, 2002; Frápolli, 2017). Incluso podríamos decir que la barra de juicio aparece en tanto explicita algo con respecto al contenido, a saber, que está siendo aseverado. No agrega algo al contenido, no lo cambia, no es parte de él, dice algo de este y, en virtud de ello, hace referencia a la preservación de verdad de unos a otros contenidos, en cadenas inferenciales.

En este sentido, y en palabras de Frege, «el símbolo $\vdash$ es, en él [lenguaje conceptográfico], el predicado común para todos los juicios» (1879, §3). Correspondería a la expresión «es un hecho» que, a su vez, funciona como un predicado de los contenidos judicables completos, como un operador de segundo orden. Es interesante cómo esta barra de juicio no compromete al proyecto fregeano con una cierta interpretación correspondentista de la noción de verdad, según la cual esta estaría definida como una relación entre el lenguaje y los hechos del mundo, en la que aquel es reflejo de este. Más bien, la propuesta fregeana nos lleva a pensar que la verdad es algo que se predica de juicios y que puede preservarse en tránsitos inferenciales.

La barra de contenido, por su parte, es aquella barra horizontal que aparece siempre tras la de juicio, parece, por su configuración visual, que es la que unifica y presenta el contenido judicable que se enlazará con otros en la cadena de inferencias, y que puede afirmarse o negarse. De esta barra pueden salir, hacia abajo y de forma vertical, otros dos tipos de barras: una pequeña, que se conoce como barra de negación y otra más grande, que suele estar a la izquierda de esta, y que se conoce como barra de condicionalidad.

En cuanto a la barra de negación es importante hacer un análisis similar al que hicimos para la barra de juicio. Así como esta, dicha barra tiene la función de explicitar algo con respecto al contenido; en este caso, que el contenido está siendo negado, que no se afirma su verdad y que, por tanto, el contenido no tiene lugar (1879, §7). La barra de negación, así, funciona como un operador de segundo orden: aquel que opera sobre contenidos completos y, sobre ellos, dice algo, sin ser parte de ellos.

También vale la pena mencionar que del análisis de la barra de negación se infiere la definición del operador de disyunción. Así, estas dos simbolizaciones (figura 4), en las que la negación es protagonista, significan ambas disyunciones, la inclusiva y la exclusiva:

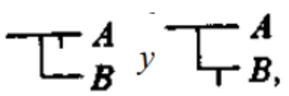


Figura 4. A o B (Tomado de Frege, 1879, §7)

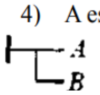
La barra de condicionalidad, por su parte, es aquella que indica la subordinación; aquella que hace evidente la relación lógica entre un contenido que sostiene, fundamenta, y otro que es sostenido, fundamentado. En ese orden de ideas, esta barra tiene un fuerte protagonismo en el proyecto de la notación conceptual, porque es la que representa la relación de implicación, aquella que es el centro del análisis lógico.

Distinta a otras notaciones y, con ello, a otras formas de representar la consecuencia lógica, en la propuesta fregeana se hace evidente la relación de subordinación de forma visual; por su característica no–lineal, se dibuja la relación de fundamentación entre contenidos. Incluso, si se trata de varios juicios que están sosteniendo a uno distinto, el dibujo por medio de las barras, como en la Figura 1, indica fácilmente cuáles son esos contenidos que están fundamentando al de arriba. En suma, la relación de implicación lógica es evidente en la simbología fregeana. En ese sentido, y como justifica Frege, su notación es mucho más clara que otras lineales, que no hacen tan visible dicha relación, por la manera en la que estas están escritas, siguiendo los parámetros del lenguaje algebraico (Frege 1883).

Otro aspecto que es importante tener en cuenta tiene que ver con la manera en la que Frege define la condicionalidad (1879, §5). Así como la barra de juicio, esta también cumple un rol expresivo y se define por su rol inferencial: por una parte, expresa la relación de fundamentación entre juicios y, por otra, se define por las implicaciones que se siguen de la relación de fundamentación que se simboliza:

§ 5. Si A y B significan contenidos judicables,[8] entonces hay las siguientes cuatro posibilidades

1) A es afirmada y B es afirmada;
2) A es afirmada y B es negada;
3) A es negada y B es afirmada;
4) A es negada y B es negada.



(Frege, 1879, §5)

En este orden de ideas, el lenguaje que Frege propone tiene como centro el análisis inferencial y, con ello, los operadores y barras presentados en él se definen por el rol que ocupan en los tránsitos inferenciales y por lo que explicitan sobre ellos. Lo mismo ocurre con la manera en la que Frege define la generalidad de contenido y explica su simbolización (Figura 5).

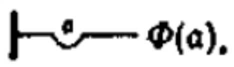


Figura 5. La generalidad de contenido (Tomado de Frege, 1879, §11)

La concavidad de la barra del contenido, en la que aparece la letra gótica, indica el alcance de la función[3]. Esta está representada por dicha letra que, a su vez, se escribe como argumento tras la barra de contenido. Dada la barra de juicio, esta simbolización representa que sea lo que sea que simbolice la letra a, el contenido es un hecho. En otras palabras, podríamos decir que la generalidad es definida como aquella que limita el alcance de aquello que puede inferirse con verdad y que, al mismo tiempo, posibilita lo que puede inferirse, como un hecho, por medio de la función que se simboliza. En este orden de ideas, siguen apareciendo las inferencias como fundamentales en la propuesta fregeana y las barras como la manera gráfica de representarlas.

Sin embargo, pese a los intentos de Frege por presentar una simbolización capaz de dar cuenta de dichas relaciones, para, con ella, poder someterlas a la prueba lógica, su propuesta no fue bien recibida por la comunidad de lógicos de su época. Recibió críticas muy duras, como la de Schröder, por ejemplo, según la cual el sistema notacional fregeano solo era un gran desperdicio de espacio (1880). Rápidamente su propuesta fue descartada, además, porque parecía hacer más difícil lo que ya había sido dicho por otras personas, como por Boole.

Ante estas críticas mordaces, Frege decide justificar su proyecto y su propuesta notacional; una de sus estrategias de defensa es demostrar la insuficiencia de la simbolización usada por Boole y evidenciar cómo la suya sí es adecuada para representar los tránsitos inferenciales. A propósito de esto, Frege afirma que la propuesta de este lógico, por su linealidad y por hacer uso de los símbolos algebraicos, no pone el énfasis en la representación de las relaciones inferenciales. Es más, su propuesta parece suponer que la actividad lógica es meramente mecánica, algo que el lógico alemán cuestiona vehementemente. Además, en la propuesta booleana las proposiciones se representan como ecuaciones, en lenguaje algebraico, dejando de lado el papel protagónico del pensamiento en sus relaciones lógicas con otros más (Frege, 1880/81).

Aun así, y pese a los esfuerzos teóricos de Frege, su sistema notacional fue descartado, tanto que hoy no es ampliamente enseñado en las aulas de lógica, ni

[3] La función es entendida por Frege como el componente que es estable y que representa la totalidad de las relaciones que pueden establecerse y seguirse a partir del juicio general. El argumento, por su parte, es aquel componente que se encuentra en estas relaciones y que puede reemplazarse, es, en ese sentido, variable (Frege, §9).

siquiera cuando las clases tienen a Frege como autor principal. Sus aportes a la lógica se enseñan como fundamentales, incluso se afirma, de él, que es el segundo padre de la lógica; sin embargo, no pasa lo mismo con su apuesta gráfica, que aún se mira de reojo con algo de sospecha y que se suprime de la enseñanza de Frege como si no fuera necesaria o incluso oportuna. En este documento quisiera hacer una defensa de ella, quisiera mostrar, por medio de una experiencia didáctica, cómo cobran vida las razones de Frege para defenderla.

§3. El reto pedagógico: didácticas diversas para una lógica clásica

Como docente de lógica me he enfrentado a los problemas que toda docente se encuentra en el aula cuando tiene un interés por fomentar las habilidades lógicas en estudiantes. Rápidamente aparece el cuestionamiento por el objetivo que parece fundamental en nuestros cursos: ¿con lo que enseño sí estoy fomentando habilidades lógicas? ¿Estoy siguiendo la idea aristotélica de que el estudio de la lógica permitirá a mis estudiantes pensar mejor sus propios pensamientos? Tras años de su enseñanza es fácil llegar a respuestas negativas: la lógica, así como la matemática, se vuelven materias con un grado alto de dificultad, que no parecen ser aplicables en la cotidianidad de nuestras vidas. Algo paradójico, pues el mundo es matematizable y nuestro pensamiento se rige por leyes lógicas: vivimos y pensamos en medio de relaciones lógicas y matemáticas. Sin embargo, la lógica y la matemática, en las aulas, parecen ajenas a nuestra vida y pensamiento.

Una interpretación de lo anterior sugiere que nos hemos convencido de que estas áreas del saber son formales, y hemos entendido dicha formalidad como aquella que implica abstracción, esquematicidad e indiferencia con respecto a los contenidos. Siguiendo esto, hemos decidido enseñar lógica haciendo solamente uso de los sistemas formales propuestos por los lógicos clásicos y esperamos que nuestros estudiantes manipulen dichos sistemas casi mecánicamente. En ello centramos los procesos evaluativos, por eso, rara vez un estudiante usa dichos sistemas para analizar sus propias inferencias (Bejarano, Forero, Álvarez, en prensa).

Esta circunstancia me llevó a buscar nuevas estrategias de enseñanza de la lógica, a diseñar las que fueran necesarias para poner el énfasis en la evaluación de inferencias. Como lectora de Frege, encontré en él un proyecto centrado en los contenidos judicables y en las maneras en las que estos se individúan y obtienen a través de cadenas lógicas. Encontré una propuesta que no entiende la formalidad como indiferencia por los contenidos, sino que los pone como protagonistas del análisis lógico. En ese sentido, decidí acercarme didácticamente a la propuesta del lógico de Wismar. Tenía intuiciones que me sugerían que en la propuesta notacional podría encontrar respuestas, pero fue solo una situación pedagógica la que logró acercarme a ella.

Como docente de una universidad pública colombiana, que acoge a personas con distintas habilidades, me encontré con estudiantes ciegos en mi aula. De inmediato entendí la cantidad de limitaciones que mi espacio académico imponía a estos estudiantes: todas las formas de enseñanza de la lógica clásica se volvían un problema, la exigencia de su visualidad era taxativa. ¿Cómo enseñar la formalización de un enunciado complejo con múltiple cuantificación a una persona que no puede verlo? ¿Cómo entenderá, en esa formalización, el alcance de los cuantificadores, cuando le lea la fórmula?

La situación pedagógica empezó a ser un problema serio en mi ejercicio docente, no solamente aparecía la pregunta por la relevancia de la enseñanza de la lógica como promotora de buenos hábitos de pensamiento, sino que aparecía uno más: ¿cómo fomentar esos buenos hábitos si todas las herramientas creadas para tal fin parecen exigir que se las vea?

De acuerdo con la *Convención Internacional sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad* (CRPD, por su sigla en inglés), aprobada por la Asamblea General de las Naciones Unidas, el 13 de diciembre de 2006, la discapacidad no se entiende como una mera condición de quien es ciego o sordo o tiene alguna limitación en su movilidad, se entiende en la relación entre estas deficiencias y las barreras que el medio impone y que impiden que dichas personas tengan una participación plena, en condiciones igualitarias con las demás personas (2006, Art. 1).

En nuestras aulas existen esas barreras, en las de lógica, se hacen evidentes. Por eso, tenemos un llamado urgente a pensar todos los ajustes razonables para nuestros espacios académicos, entendiéndolos como: «las modificaciones y adaptaciones necesarias y adecuadas que no impongan una carga desproporcionada o indebida, cuando se requieran en un caso particular, para garantizar a las personas con discapacidad el goce o ejercicio, en igualdad de condiciones con las demás, de todos los derechos humanos y libertades fundamentales» (CRPD, Art. 2).

En ese orden de ideas, como docentes, tenemos la tarea de pensar espacios académicos sin barreras, espacios académicos diversos: en los que puedan confluir personas con distintas habilidades y limitaciones, y acceder, como las demás, a todas las herramientas que, como docentes, les aportamos. Esta búsqueda, que decidí emprender en mis aulas, me acercó a la construcción de materiales didácticos para la enseñanza de la lógica a personas ciegas. En principio, mi énfasis estaba puesto allí, por eso propuse un Proyecto de Facultad[4] para la creación de una caja de materiales, que pudiera ser usada por docentes de lógica y argumentación, y que permitiera eliminar dichas barreras señaladas por la CRPD.

Este proceso implicó la creación de distintas estrategias, que incorporaban el Braille, múltiples texturas y distintos materiales, como la plastilina, las gemas, el balso, la arcilla, los limpiapipas, entre otros (Bejarano, 2019) (Figuras 6, 7 y 8).

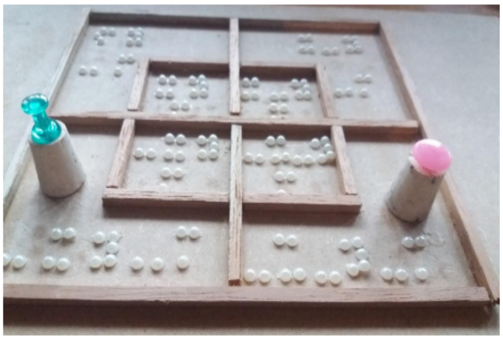


Figura 6. Tablas de Lewis

Figura 7. Aros de conjuntos

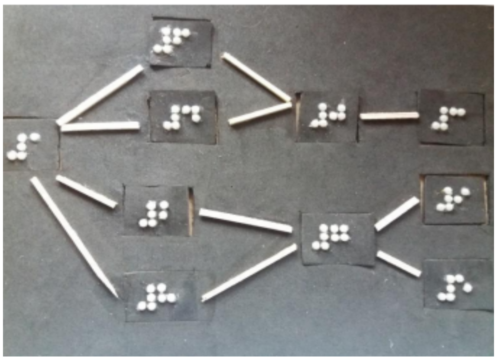


Figura 8. Diagramas argumentales

4 *Estrategias, conceptos y materiales para enseñar lógica a las personas ciegas.* Proyecto de la Facultad de Humanidades, de la Universidad Pedagógica Nacional, código FHU–249.

La aplicación de los materiales construidos me llevó a una consideración distinta: estudiantes que pueden ver preferían usarlos, en vez de los clásicos que usualmente se les enseñan. Estos materiales eran novedosos y, precisamente, dado que no se veía la dificultad de sus lenguajes y sistemas formales, porque los usábamos con tapaojos, no sesgaban su mirada hacia la herramienta de la lógica, que ya no parecía difícil y densa, sino que invitaba a exploraciones táctiles y a construcciones pausadas, a ritmos distintos. En ese sentido, los materiales no solo fueron ideales para la enseñanza de la lógica a las personas ciegas, sino a estudiantes en general.

Algunas veces olvidamos que no todas las personas aprenden al mismo ritmo y de la misma manera, y la unificación de los métodos y herramientas parece que implicara homogeneidad en tiempos y formas de aprendizaje. Visibilizamos a quienes sentimos que son notablemente distintos y por ellos nos ocupamos de crear estrategias particulares para asistir su educación. Y ese es precisamente el problema ante el que estamos: la brecha que establecemos entre quienes son «normales» y quienes parecen requerir asistencia especial. Mi problema de investigación educativa dio un giro radical en el momento en el que noté que todos mis estudiantes eran especiales y distintos, que cada quien hacía las cosas a su manera y aprendía a sus ritmos. Que mi propósito no era crear unos materiales distintos para unos estudiantes particulares, sino repensar la manera tan homogénea y estática en la que enseñaba lógica.

> Hemos avizorado, no sin cierto desánimo, una intensa y repetida ambigüedad cuando se trata de tomar decisiones éticas en el campo de la educación, hallando testimonios desencontrados y hasta opuestos (entre maestros, familiares, alumnos y demás profesionales) a propósito de qué significa alteridad, cuáles son sus verdaderas raíces filosóficas, cómo pueden diseñarse políticas públicas al respecto, qué prácticas se consagran como igualitarias, cuando estas mismas prácticas sólo se revisten de un carácter de beneficiencia y puro virtuosismo propio, cómo se afecta el presente y el destino de las vidas de las niñas, niños, jóvenes y adultos en situación o condición de fragilidad o vulnerabilidad o desigualdad (Skliar, 2017, págs. 165–166).

Tal como lo plantea Skliar, la educación se vuelve asistencialista y benevolente, además de propagadora de ideas categorizadoras de los seres humanos, en sus diferencias, de su jerarquización e incluso, normalización. Y, al fin y al cabo, «la normalidad no es nada, ni nadie es normal» (Skliar, 2017, p. 177). Todas las personas somos distintas y aprendemos de formas diversas, por eso, parte de la tarea pedagógica que tenemos como docentes es velar por promover esa diversidad, por no sancionar la diferencia ni querer asistirla.

Así pues, mi proyecto didáctico se enmarca en la búsqueda por construir aulas diversas, por propiciar espacios de experiencia, en los que las herramientas de la lógica puedan explorarse desde otros lugares y a través de otros sentidos. En las que la innovación educativa sea medular y permita a la lógica salirse de aquellos lugares que parecen que fueran constitutivos de ella y, al mismo tiempo, que permita a cualquiera acceder a sus estrategias, herramientas y contenidos. La apuesta es, por tanto, la de una lógica diversa.

§4. Una estrategia fregeana para una lógica diversa: la propuesta

El material que aquí les presento retoma la simbolización fregeana, esa que fue descartada y que caracterizamos dos apartados atrás. La razón por la cual propongo la defensa de este sistema notacional es triple: por una parte, que este está pensado como un instrumento de representación de pensamientos y de sus múltiples relaciones inferenciales. Por tanto, es ideal para hacer las pruebas rigurosas que permitan evaluar dichos tránsitos entre contenidos. En ese orden de ideas, no es un sistema que suponga lejanía con respecto a los contenidos y cercanía solo con estructuras sintácticas. Más bien, es uno que acerca a la lógica a los contenidos y que, por tanto, puede posibilitar análisis de las inferencias propias y ajenas. En ese sentido, es un sistema que podría ayudarnos a cumplir las expectativas de nuestros cursos: fomentar habilidades lógicas y propiciar estrategias para que los estudiantes puedan pensar con criterios sus propios pensamientos.

La segunda razón que justifica mi defensa a la notación fregeana tiene que ver con sus posibilidades, en tanto es bidimensional y está compuesta por barras. Contrario a lo que sucede con otras formas de simbolización, la propuesta de Frege permite evidenciar las relaciones lógicas de una forma muy simple. Si adaptamos la simbolización de Frege como recurso táctil, las relaciones lógicas no solo se pueden ver, sino incluso sentir. La barra de juicio se sentiría al inicio de una exploración táctil, y nos pondría en situación de saber si el contenido se está afirmando o no; la barra de contenido se distinguiría, sin ningún problema, de las demás, y nos permitiría entender que allí se unifica un contenido. Basta con ir por una barra de contenido y toparse con una de negación, para sentir cómo esta última impide el rumbo del dedo, y cómo nos afirma algo con respecto a ese contenido puntual. Lo mismo nos sucede con la barra de condicionalidad, que nos permite sentir la relación de subordinación; solo el movimiento del dedo nos transporta a la idea de que el contenido inicial está siendo sostenido por otros contenidos más, nos indica cuáles y cuántos son esos contenidos.

La tercera, y última, razón es que la adaptación de la notación fregeana a materiales táctiles posibilita una exploración sensorial diversa, permite que se acceda a ella de múltiples maneras y usando sentidos distintos, lo que permite que las personas puedan acceder a este sistema, de acuerdo con sus propias habilidades y diferencias. Incluso que puedan explorar el material e irlo sintiendo a su propio ritmo. Es, por tanto, un material diverso.

Así, las tablas fregeanas son una adaptación táctil de la propuesta notacional de Frege. Se elaboran con cartón paja de base y con balsos de forma cuadrada, para representar las barras, también se usa Braille para simbolizar las letras. En un inicio del proyecto hacíamos las tablas con un tipo de cartón paja muy grueso y grande, pegábamos con colbón las gemas que representarían los puntos del Braille (Figura 9). Luego fuimos perfeccionando la manufactura, escogiendo el mejor cartón, más liviano, dándole color a las tablas y pegando las gemas con un pegante distinto y siliconado, lo que resultaba más resistente y dejaba menos huella en el cartón. También mejoramos la posición de las gemas, dado que su cercanía o distancia con otras puede significar letras muy distintas a las que se busca representar (Figura 10).

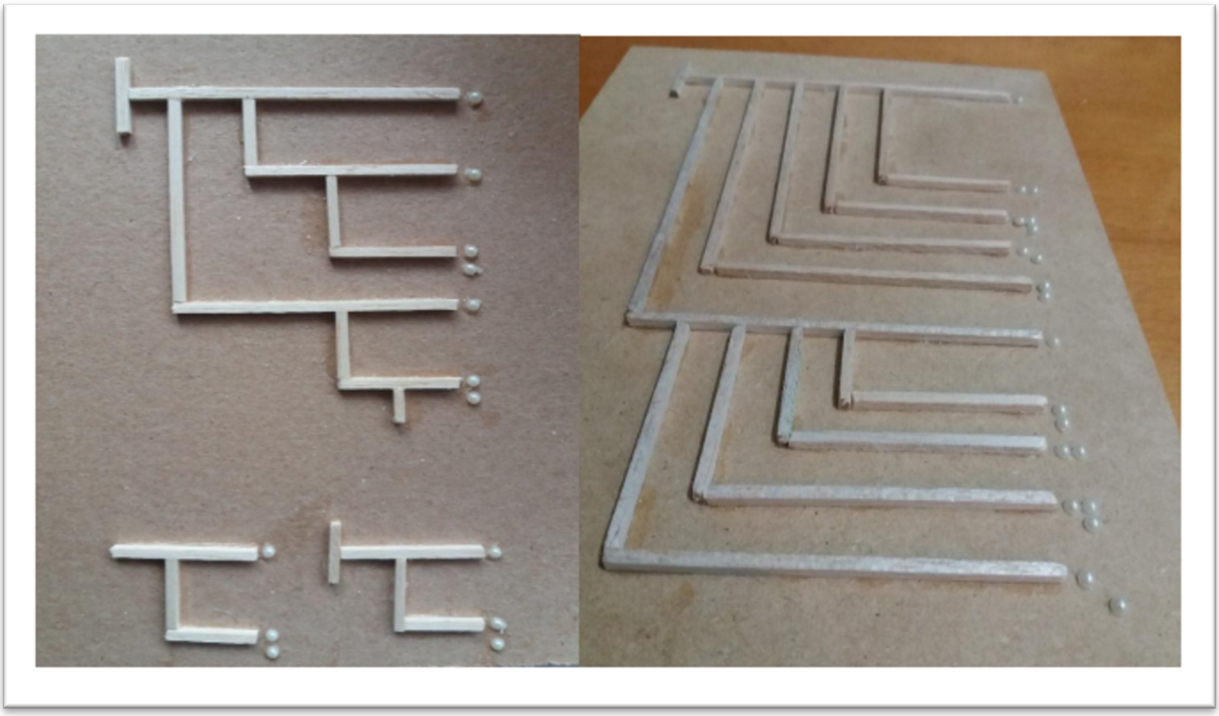


Figura 9. Borrador de tablas fregeanas

Figura 10. Tablas fregeanas

Desde el 2016, en la Universidad Pedagógica Nacional hemos mantenido un Semillero de Didáctica de la Lógica y la Argumentación, y en este hemos tenido una línea de trabajo en cuanto a la elaboración y análisis de estas tablas fregeanas. Con el apoyo de la monitora, hoy egresada de nuestra Licenciatura, Yuri Buelvas, hemos realizado diversas aplicaciones de los materiales, y estas se han planteado por medio de distintas etapas (Ver Buelvas, 2020).

Una primera etapa corresponde a la exploración táctil, que permite reconocer las barras, distinguirlas y, posteriormente, hacer lectura de las relaciones que las tablas están proponiendo (Figura 11). En ocasiones combinamos dicho ejercicio con una exploración sonora, mediada por la tabla; es decir, algunas estudiantes, que están haciendo la exploración con sus manos y con ojos vendados, en los casos en los que era necesario vendarlos, van describiendo a otras lo que sienten, con el mayor grado de especificidad. Estas últimas van dibujando lo que escuchan y van formando, así, la representación gráfica de la tabla (Figura 12).

Figura 11. Exploración táctil

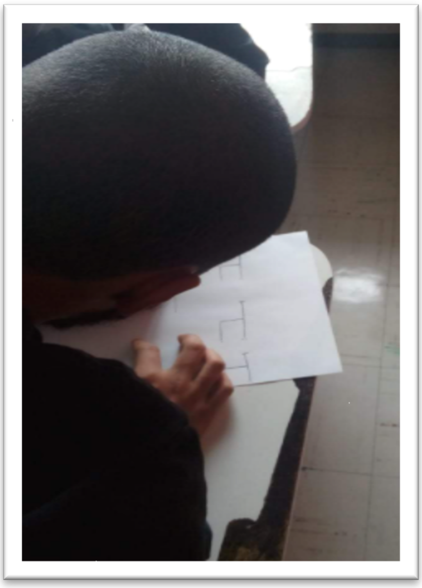


Figura 12. Construcción gráfica

Tras la exploración inicial y el reconocimiento de las barras de la notación fregeana, pasamos a una segunda etapa. En esta la propuesta es analizar relaciones inferenciales, teniendo en cuenta los contenidos que se encuentran en ella. La simbolización nos permite explicitar tránsitos lógicos entre estos contenidos, el análisis nos permite evaluarlos; preguntarnos por qué se siguen unos de otros, cómo se articulan allí los conceptos, qué leyes regulan los tránsitos inferenciales, qué tipos de verdades están presentes y cómo estas encuentran su fundamento (Figura 13). Tras esta etapa, proponemos una final, en la que la tarea sea jugar a crear redes inferenciales, con las que podamos comprometernos, y a explicitar sus estructuras lógicas. Para esto, hacemos uso de los materiales por separado (Figura 14).

Figura 13. Aplicación etapa 2

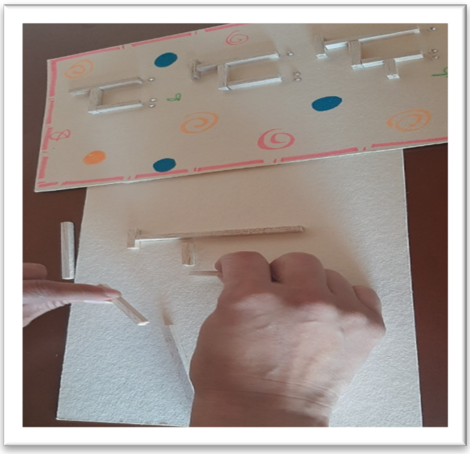


Figura 14. Aplicación etapa 3

La propuesta permite un acercamiento al proyecto lógico de Gottlob Frege, a su lenguaje conceptual, a los símbolos que utiliza y al sustento teórico que defiende; al mismo tiempo, permite, a quienes usen los materiales, tener a la mano una herramienta lógica que posibilite el análisis de las relaciones inferenciales propias y ajenas. Por último, aunque no menor, esta propuesta puede usarse en un aula diversa; al material pueden acceder todas las personas, dado que está diseñado para distintos usos y que puede ser explorado por medio de sentidos distintos.

Por último, quisiera cerrar este texto haciendo dos invitaciones puntuales: la primera, que no descartemos la notación fregeana, pues tiene una potencia enorme en cuanto a la representación de relaciones lógicas, tanto así que, estando adecuada a un material táctil, permite que se sientan dichas relaciones al pasar simplemente los dedos. La segunda, que nos permitamos, como docentes, la innovación en las aulas de lógica, que no nos quedemos con la idea de una lógica formal, abstracta y abstraída, que poco logra con nuestros estudiantes; que nos permitamos imaginar estrategias diversas y no temamos explorar, con algunos otros de nuestros sentidos, los saberes e instrumentos de la lógica.

REFERENCIAS

BEJARANO, ÁNGELA (2019). «Materiales para el fomento de las habilidades lógicas. La cajita lógico–fregeana para enseñar lógica a personas ciegas». *Informe final, Proyecto de Facultad FHU–249. Facultad de Humanidades, Universidad Pedagógica Nacional.* Bogotá: Autora.

BEJARANO, ÁNGELA; FORERO, JOSÉ A. Y ÁLVAREZ, JESICA (en prensa). «La lógica inferencialista como una alternativa para la enseñanza de la lógica a estudiantes de filosofía: un aporte para la enseñanza de la lógica a estudiantes ciegos». En *Nuevas didácticas de la filosofía: la experiencia de la Licenciatura en Filosofía de la Universidad Pedagógica Nacional.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

BRANDOM, ROBERT (2002). *La articulación de las razones. Una introducción al inferencialismo.* Madrid: Siglo XXI editores.

BUELVAS, YURI (2020). «Sistematización de la experiencia desde el grupo: Análisis Lógicos de Discursos». *Informe de práctica pedagógica VI, Licenciatura en Filosofía, Universidad Pedagógica Nacional.* Bogotá: autora.

NACIONES UNIDAS (2006). Convención Internacional sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad (CRPD). Disponible en: https://www.un.org/esa/socdev/enable/documents/tccconvs.pdf

DUMMETT, MICHAEL (1973). *Frege´s Philosophy of language.* New York: Harper y Row.

FRÁPOLLI, MARÍA J. Y VILLANUEVA, NEFTALÍ (2013). «Frege, Sellars, Brandom. Expresivismo e Inferencialismo contemporáneos». En *Perspectivas en la Filosofía del lenguaje.* Zaragoza: Universidad de Zaragoza. Doi: http://dx.doi.org/10.6018/daimon/193941

FRÁPOLLI, MARÍA J. (2017). «Reivindicando el proyecto de Frege. La prioridad de las proposiciones y el carácter expresivo de la lógica». *Disputatio. Philosophical Research Bulletin* 6:7 (2017), pp. 1–42.

FREGE, GOTTLOB (1879). «Conceptografía. Un lenguaje de fórmulas, construido a semejanza del lenguaje aritmético, para el pensamiento puro». En *G. Frege, Escritos sobre lógica, semántica y filosofía de las matemáticas,* pp. 39–154. [Traductor Ulises Moulines México: Universidad Autónoma de México, 2016].

FREGE, GOTTLOB (1879–1891). «Logic». En *Posthumous Writings.* Oxford: Basil Blackwell, pp. 1– 8.

FREGE, GOTTLOB (1880/81). «Boole's logical calculus and the Concept–schrift» En *Posthumous Writtings.* Oxford: Basil Blackwell, pp. 9–46.

FREGE, GOTTLOB (1883). «On the aim of the ´Conceptual Notation´». En *Conceptual Notation and related articles*, pp. 90–101. [Traducido por Terrell Bynum. Oxford: Oxford University Press, 1972].

FREGE, GOTTLOB (1884). «Los fundamentos de la aritmética». En *Gottlob Frege. Escritos filosóficos.* [Traducido por Ulises Moulines. Barcelona: Crítica, 1996].

SCHRÖDER, ERNST (1880). «Schröder Review of Frege's Begrifsschrift». En *Zeitschrift für Mathematik und Physik, Historisch–literarische Abtheilung*, 25: pp. 81–94.

SKLIAR, CARLOS (2017*). Pedagogías de las diferencias.* Buenos Aires: Noveduc Libros.

Fregean didactics for tactile logic

In the *Begriffsschrift*, Gottlob Frege proposes a notational system to represent the logical relationships between thoughts. That system is alien to the classical one, it is not linear nor is it based on the signs of arithmetic, rather it is two–dimensional and uses the signs proposed by Frege in that work. Despite the fact that said notation was widely questioned and that, today, it is not the one used in logic classes, this text aims to be a vindication of said notational system and its didactic potentialities in a diverse classroom.

Keywords: Frege · Logic · Notation · Didactic · Tactile.

Didácticas fregeanas para una lógica táctil

En la *Conceptografía* Gottlob Frege propone un sistema notacional para representar las relaciones lógicas entre los pensamientos. Dicho sistema es ajeno al clásico, no es lineal ni está basado en los signos de la aritmética, más bien es bidimensional y usa los signos propuestos por Frege en aquella obra. Pese a que dicha notación fue ampliamente cuestionada y que, hoy por hoy, no es la que se usa en las clases de lógica, este texto pretende ser una reivindicación de dicho sistema notacional y de sus potencialidades didácticas en un aula diversa.

Palabras Clave: Frege · Lógica · Notación · Didáctica · Táctil.

ÁNGELA ROCÍO BEJARANO CHAVES es Profesora de lógica de la Licenciatura en Filosofía, de la Universidad Pedagógica Nacional, de Bogotá, Colombia. Actualmente es la Coordinadora del Programa. Es Doctora en Lógica y Filosofía de la Ciencia por la Universidad de Salamanca, España. Su trabajo se centra en el estudio y enseñanza de la lógica, la argumentación y la filosofía del lenguaje, así como en la obra de Gottlob Frege. Su publicación más reciente, en colaboración con José Andrés Forero y Jesica Álvarez, es «La lógica inferencialista como una alternativa para la enseñanza de la lógica a estudiantes de filosofía: un aporte para la enseñanza de la lógica a estudiantes ciegos» (Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2021).

INFORMACIÓN DE CONTACTO | CONTACT INFORMATION: Departamento de Ciencias Sociales, Facultad de Humanidades, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia. Calle 72 # 11–86. e–mail (✉): arbejaranoc@pedagogica.edu.co.

HISTORIA DEL ARTÍCULO | ARTICLE HISTORY

Received: *24–May–2021*; Accepted: *29–June–2021*; Published Online: *30–June–2021*

COMO CITAR ESTE ARTÍCULO | HOW TO CITE THIS ARTICLE

Bejarano, Ángela (2021). «Didácticas fregeanas para una lógica táctil». *Disputatio. Philosophical Research Bulletin* 10, no. 17: pp. 231–250.